



# Réduction d'ordre de modèle d'un phénomène d'amortissement non-linéaire dans le cadre des microsystemes.

Alexia Missoffe

## ► To cite this version:

Alexia Missoffe. Réduction d'ordre de modèle d'un phénomène d'amortissement non-linéaire dans le cadre des microsystemes.. Autre. Ecole Centrale Paris, 2010. Français. NNT : 2010ECAP0039 . tel-00552076v2

**HAL Id: tel-00552076**

**<https://theses.hal.science/tel-00552076v2>**

Submitted on 23 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**ÉCOLE CENTRALE DES ARTS**

**ET MANUFACTURES**

**« ÉCOLE CENTRALE PARIS »**

## **THÈSE**

**présentée par**

**Alexia MISSOFFE**

**pour l'obtention du**

## **GRADE DE DOCTEUR**

**Spécialité : Science de l'ingénieur**

**Laboratoire d'accueil : Département SSE Supelec/ Laboratoire MSSMAT ECP**

**SUJET : Réduction d'ordre de modèle d'un phénomène d'amortissement non-linéaire dans le cadre des microsystemes.**

**soutenue le 13 décembre 2010**

**devant un jury composé de :**

Eric COLINET  
Fabrice THOUVEREZ  
Etienne BALMES  
Didier CLOUTEAU  
Jérôme JUILLARD  
Denis AUBRY

Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Directeur de thèse  
Co-directeur de thèse

## Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au département Signaux et Systèmes Electroniques (SSE) de SUPELEC. Je remercie Monsieur Jacques OKSMAN, ancien chef de département pour son accueil au sein de l'équipe. Je remercie également Monsieur Gilles FLEURY qui a pris sa suite dans ces fonctions.

Je remercie Monsieur Didier CLOUTEAU, professeur à l'Ecole Centrale Paris d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, ainsi que Monsieur Fabrice THOUVEREZ, professeur à l'Ecole Centrale Lyon et Monsieur Eric COLINET, ingénieur de recherche au CEA-LETI d'avoir accepté de rapporter mon travail. Je remercie également Monsieur Etienne BALMES, professeurs à Arts et Métier ParisTech d'avoir accepté de faire partie de mon jury en qualité d'examineur.

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Jérôme JUILLARD, professeur à SUPELEC pour avoir encadré mon travail. Je le remercie tout particulièrement pour sa relecture attentive du manuscrit. Je remercie également Monsieur Denis AUBRY, professeur à l'Ecole Centrale Paris d'avoir co-encadré ce travail de thèse.

Je remercie également Luc BATALIE, Francis TRELIN, Fabienne SURAUD, puis Karine BERNARD pour leur disponibilité et leur sympathie. Je remercie également tous les autres thésards, dont certains ne sont d'ailleurs plus thésards depuis un moment, pour les nombreux moments partagés : Tudor, Morgan, Davud, Emilie, Rawad, Sylvain, Carine, Hassan, Mohammad, Song et Cristina. Je remercie enfin ma famille, mes parents et mes sœurs pour leur continuel soutien. Je dédie tout particulièrement ce travail à ma grand-mère.

## Résumé

Cette thèse traite de la réduction d'ordre de modèle du phénomène communément rencontré dans la modélisation de microsystèmes, à savoir, dans la littérature anglaise, le « squeeze-film damping ». Dans un premier chapitre sont présentées les différentes méthodes de réduction d'ordre de modèle. Dans le cas des systèmes linéaires, elles ont un cadre théorique bien établi. Ces méthodes peuvent être adaptées pour les systèmes non-linéaires. La validité des modèles réduits résultants sera alors réduite à un certain espace des phases, leur établissement faisant intervenir certaines trajectoires particulières servant d'apprentissage. On présente finalement la méthode des modes normaux non-linéaires dont les modèles résultants ne dépendent pas d'une trajectoire d'apprentissage.

Au chapitre 2, on s'intéresse plus particulièrement au phénomène de « squeeze-film damping » régi par l'équation de Reynolds. Après avoir détaillé son établissement à partir de certaines hypothèses, on décrit les différentes méthodes de résolution de l'équation linéaire puis non-linéaire de la littérature. On compare ensuite les résultats d'un modèle de l'équation de Reynolds à des simulations éléments finis de l'équation de Navier-Stokes afin de valider les hypothèses faites pour la dérivation de l'équation de Reynolds. On propose ensuite une résolution originale par changement de variable. On étudie aussi plusieurs autres résolutions possibles ainsi que plusieurs bases de projection parmi celles décrites dans le premier chapitre.

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation du problème couplé que constitue le micro-interrupteur MEMS qui est un candidat au remplacement des interrupteurs à base de transistors dans les communications RF. Sa modélisation fait intervenir trois domaines, la mécanique, l'électrostatique, et la fluide à travers l'équation de Reynolds. Après avoir décrit les différents modèles de la littérature, on propose un modèle réduit couplé dont le modèle fluide est basé sur le modèle établi au chapitre 2. Ce modèle est validé par rapport à des modèles différences finies et à des résultats expérimentaux de la littérature.

Enfin le quatrième chapitre traite de la réduction du coût d'évaluation du modèle réduit couplé de micro-interrupteur du chapitre 3. La première méthode proposée consiste à trouver une fonction d'approximation de la projection de la force fluide sur le premier mode mécanique, fonction des coordonnées modales mécaniques position et vitesse. Cette méthode ne se révèle valable que dans le cas incompressible. Dans le cas compressible, la résolution de l'équation de Reynolds restant obligatoire, on utilise la méthode de Rewienski *et al.* qui consiste à linéariser par morceaux les fonctions régissant la dynamique. Une autre méthode de linéarisation par morceaux, tirant parti d'une particularité du modèle du chapitre 2 et permettant de s'affranchir d'une trajectoire d'apprentissage, est également proposée.

# Abstract

This thesis deals with reduced-order modelling of squeeze-film damping, a fluidic phenomenon that is commonly encountered in MEMS. In the first chapter, reduced-order modelling methods are presented. For linear systems, well-established theories exist. They can be adapted to nonlinear systems. However, the resulting reduced-order models are valid in a certain region of the state-space only, depending on the training trajectory. The method of nonlinear normal modes, which does not depend on a training trajectory is also introduced.

Chapter two is focused on the squeeze-film damping phenomenon governed by the Reynolds equation. We first establish the equation from appropriate hypotheses, and then present the different resolutions of its linear and nonlinear form found in literature. The results from a model based on the Reynolds equation are then compared to results from a finite element Navier-Stokes model, in order to validate the various hypotheses made. An original method of resolution based on a change of variable is then proposed. Several other method of resolution are studied as well as different projection bases amongst those presented in chapter one.

Chapter three is dedicated to the modelling a micro-switch, a candidate to the replacement of switches based on transistors in RF communications. Its modelling implies the coupling of three domains: mechanics, electrostatics, and fluidics with Reynolds equation. Following a description of the models from literature, a coupled model is proposed, the fluidic model being the one presented in chapter two. This model is validated compared to finite difference models as well as experimental data from the literature.

Finally, the fourth chapter aims at reducing the evaluation cost of the coupled micro-switch model established in chapter three. The first method consists in finding an approximation function of the projection of the fluidic force on the first linear mechanical mode as a function of the mechanical modal coordinates, position and speed. This method is applicable in the incompressible case only. In the compressible case, the Reynolds equation has to be solved. The method of Rewiński and *al.*, which consists in piecewise-linearizing the functions governing the dynamics, is used. Another method based on a piecewise-linear approach, taking advantage of the particular structure of the model presented in chapter two, thus not depending on a training trajectory, is proposed.

Mots clés: microsystemes, micro-interrupteur, squeeze-film damping, équation de Reynolds, mode normaux non-linéaires, réduction d'ordre de modèle, décomposition propre orthogonale, base Krylov.

Introduction générale.....	1
Chapitre 1 Réduction d'ordre de modèles.....	3
1.1. Introduction .....	3
1.2. Réduction d'ordre des systèmes linéaires .....	5
1.2.1. Vecteurs propres.....	6
1.2.2. Approximation de Padé.....	7
1.2.3. Troncature balancée .....	8
1.2.4. Comparaison.....	10
1.3. Réduction d'ordre des systèmes non-linéaires .....	10
1.3.1. Généralités.....	10
1.3.2. Choix d'une base de projection .....	10
1.3.2.1. Décomposition propre orthogonale (POD) .....	11
1.3.2.2. Troncature balancée .....	14
1.3.2.3. Concaténation de bases de Krylov .....	14
1.3.3. Evaluation des termes non-linéaires.....	15
1.3.3.1. Utilisation d'un développement limité.....	15
1.3.3.2. Utilisation d'une approximation de f.....	15
1.3.3.3. Linéarisation par morceaux .....	16
1.3.3.4. Comparaison des différentes approches .....	18
1.3.4. Stabilité, passivité.....	18
1.4. Modes propres non-linéaires. ....	18
1.4.1. Introduction .....	18
1.4.2. Equation régissant les variétés invariantes.....	20
1.4.3. Détermination des variétés .....	21
1.4.3.1. Développement asymptotique .....	21
1.4.3.2. Méthode de Galerkin .....	24
1.4.3.3. Formes normales .....	26
1.4.3.4. Utilisation de la périodicité du mouvement .....	28
1.4.3.5. Prise en compte de la force extérieure dans l'établissement du MNN.....	28
1.4.3.6. Système soumis à l'amortissement d'un film d'air comprimé [Westby 2003] .....	29
1.4.4. Conclusion.....	30
1.5. Couplage.....	32
1.6. Conclusion.....	33
Chapitre 2 Résolution de l'équation de Reynolds.....	34
2.1. Etablissement et résolution de l'équation de Reynolds.....	35
2.1.1. Etablissement de l'équation de Reynolds.....	35
2.1.2. Equation de Reynolds linéarisée .....	38
2.1.2.1. Résolution analytique .....	38
2.1.2.2. Résolution numérique .....	40
2.1.2.3. Modèle équivalent circuit du « squeeze-film damping » .....	40
2.1.3. Résolution de l'équation de Reynolds linéarisée autour d'un point de fonctionnement.....	42
2.1.4. Résolution de l'équation de Reynolds non-linéaire .....	43
2.2. Equation de Navier-Stokes/ Equation de Reynolds .....	44
2.2.1. Modèle Navier Stokes 2D / Modèle Reynolds 1D.....	44
2.2.2. Modèle Navier Stokes 3D / Modèle Reynolds 2D.....	45
2.3. Modèle réduit de l'équation de Reynolds linéaire : application à la réponse fréquentielle.....	46
2.3.1. Analyse.....	46

2.3.2.	Application numérique .....	48
2.4.	Modèle réduit de l'équation de Reynolds non-linéaire : changement de variable ...	52
2.4.1.	Hypothèse des petites variations de pression .....	52
2.4.2.	Changement de variable .....	53
2.4.3.	Méthode de résolution numérique .....	54
2.4.4.	Modes propres du Laplacien .....	56
2.4.5.	Validation du modèle .....	56
2.4.6.	Intérêt du changement de variable .....	58
2.4.6.1.	Résultats .....	59
2.4.6.2.	Considérations théoriques .....	61
2.5.	Choix d'une base de projection de l'équation de Reynolds non-linéaire .....	62
2.5.1.	Modes propres du Laplacien .....	62
2.5.2.	Base de Krylov (Approximant de Pade) .....	64
2.5.3.	Modes issus de la décomposition propre orthogonale. ....	66
2.5.3.1.	Extraction des modes : Décomposition propre orthogonale .....	66
2.5.3.2.	Résultats : système linéaire /système non-linéaire .....	70
2.5.3.3.	Changement de paramètres : pression ambiante, amplitude, fréquence... 71	
2.5.3.4.	Changement de géométrie. ....	71
2.5.4.	Comparaison des différentes bases de projection .....	72
2.5.4.1.	Approximation du système linéaire.....	72
2.5.4.2.	Approximation du système non-linéaire .....	74
2.6.	Conclusion générale .....	77
Chapitre 3	Réduction d'ordre de modèle d'un système couplé .....	78
3.1.	Micro-interrupteur MEMS .....	78
3.1.1.	Principe de fonctionnement.....	78
3.1.2.	Physique d'un micro-interrupteur actionné de manière électrostatique .....	80
3.1.2.1.	Mécanique .....	80
3.1.2.2.	Actionnement électrostatique .....	81
3.1.2.3.	Phénomènes électrothermiques .....	83
3.1.2.4.	Amortissement .....	83
3.1.3.	Réponse fréquentielle du système couplé .....	84
3.1.3.1.	Modèles de la littérature .....	84
3.1.3.2.	Réponse fréquentielle du système couplé .....	84
3.1.4.	Modèles réduits de micro-interrupteur .....	87
3.1.4.1.	Modèle de [Gabbay 1998] /[Mehner 2000].....	87
3.1.4.2.	[Hung 1999], [Rewiński 2003 B], [Chen 2004]. ....	89
3.2.	Modèle couplé fluide-structure d'un micro-interrupteur à contact capacitif .....	90
3.2.1.	Equations .....	90
3.2.2.	Modèle réduit .....	90
3.2.2.1.	Euler-Bernoulli .....	90
3.2.2.2.	Equation de Reynolds.....	92
3.2.2.3.	Modèle couplé .....	92
3.2.3.	Importance de l'amortissement dans la dynamique du système étudié. ....	93
3.2.3.1.	Cas étudié .....	93
3.2.3.2.	Importance de l'amortissement du film d'air dans la dynamique .....	93
3.2.3.3.	« Incompressibilité »/ Petite variation de pression.....	95
3.2.3.4.	Importance du modèle de la viscosité .....	98
3.2.4.	Validation du modèle : comparaison à un modèle différences finies.....	99
3.2.4.1.	Modèle différences finies .....	99
3.2.4.2.	Résultats .....	101

3.2.5.	Validation du modèle : comparaison à des résultats de la littérature .....	106
3.2.5.1.	Modèles différences finies de la littérature .....	106
3.2.5.2.	Données expérimentales .....	113
3.3.	Conclusion .....	114
Chapitre 4	Evaluation des termes non linéaires .....	116
4.1.	Introduction .....	116
4.2.	Approximation globale de la force fluidique .....	116
4.2.1.	Approximation analytique de la force fluidique pour les poutres étroites .....	117
4.2.2.	Approximation numérique de la force fluidique pour les poutres larges .....	118
4.2.2.1.	Trajectoire d'apprentissage. ....	119
4.2.2.2.	Approximation de F .....	121
4.2.3.	Résultats .....	122
4.2.3.1.	Actionnement électrostatique .....	122
4.2.3.2.	Force uniforme sinusoïdale .....	125
4.2.4.	Conclusion .....	128
4.3.	Modèle linéarisé par morceaux [Rewiński 2003 B] .....	129
4.3.1.	Méthode [Rewiński 2003 B] .....	129
4.3.1.1.	Choix des points de linéarisation .....	129
4.3.1.2.	Calcul des poids .....	130
4.3.2.	Linéarisation par morceaux d'un modèle réduit de micro-interrupteur .....	132
4.3.2.1.	Modèle réduit utilisé .....	132
4.3.2.2.	Choix des points de linéarisation .....	133
4.3.2.3.	Calcul de la valeur des fonctions et des jacobiens .....	134
4.3.2.4.	Résultats : trajectoire d'apprentissage=trajectoire de simulation .....	134
4.3.2.5.	Résultats : domaine de validité des modèles .....	139
4.3.3.	Linéarisation par morceaux d'un modèle différences finies de micro-interrupteur. ....	142
4.3.3.1.	Modèle différences finies .....	142
4.3.3.2.	Résultats .....	143
4.4.	Linéarisation des coefficients du modèle réduit .....	145
4.4.1.	Principe .....	145
4.4.2.	Validation .....	146
4.5.	Conclusion .....	148
4.6.	Conclusion générale .....	150
Conclusion générale	.....	152
Références	.....	154
Annexe A Navier-Stokes ANSYS .....		159
Annexe B Equation des poutres d'Euler Bernoulli .....		163
Annexe C Modèle différences finies de l'équation de Reynolds .....		167
Annexe D Processus d'Arnoldi .....		168
Annexe E Modèle différences finies couplé .....		169
Annexe F Modèle linéarisés par morceaux : calcul des jacobiens .....		171
Annexe G Modèle réduit couplé incompressible .....		174



## Introduction générale

Les microsystemes ou MEMS (Micro-electromechanical systems) sont des composants mécatroniques de petite taille intégrant sur un substrat en silicium, des mécanismes à base de composants mécaniques simples, des capteurs, des actionneurs et toute la connectique reliant cette cellule physique à des dispositifs électroniques de traitement de l'information associée. Les microsystemes sont développés dans des domaines aussi variés que la biologie, les communications RF (filtre, interrupteur....) ou l'optique. La partie physique d'un microsysteme se caractérise par l'interaction de plusieurs domaines, les plus souvent rencontrés étant l'électrostatique, la mécanique et la mécanique des fluides, les transferts thermiques ou encore la piézo-électricité. La modélisation fine de ces phénomènes couplés, régis en général par des équations aux dérivées partielles non-linéaires, nécessite le recours à des méthodes numériques du type différences finies, éléments frontières ou éléments finis. Les modèles résultant de l'application de ces méthodes comportent un nombre extrêmement élevé de degrés de liberté. Ils sont donc peu maniables, a fortiori pour des simulations conjointes du microsysteme et de l'électronique associée. Or de bons outils de simulation, c'est-à-dire à la fois peu gourmands en ressources et précis, sont nécessaires à la conception des MEMS, pour éviter un prototypage physique coûteux.

La réduction d'ordre de modèle est une démarche consistant à construire des modèles ayant un nombre de variable d'états réduit par rapport au modèle original mais rendant compte de la complexité du comportement du système avec une bonne précision. Avant l'essor des microsystemes, ces méthodes de réduction d'ordre de modèle ont été développées pour la simulation de circuits intégrés pour lesquels les macromodèles utilisés dans des logiciels comme SPICE par exemple ne suffisaient plus [Rewiński 2003 A]. Les méthodes de réduction d'ordre de modèle sont très diverses et leur étude recouvre des aspects à la fois théoriques et pratiques, dont on rend compte au chapitre 1 de ce mémoire. Les composants MEMS actionnés de manière électrostatique, et plus particulièrement les micro-interrupteurs, sont les composants ayant le plus donné lieu à des développements de modèles d'ordre réduit ([Gabbay 1999], [Mehner 2000], [Hung 1999], [Rewiński 2003], [Chen 2004], [Yang 2004], [Younis 2004]), du fait de la richesse et de la complexité des interactions entre les phénomènes régissant leur comportement. Dans ce mémoire, on s'intéressera essentiellement à la modélisation d'un micro-interrupteur qui est un système couplé mécanique-électrostatique-fluidique. Au chapitre 2, on développe un modèle réduit original du phénomène de « squeeze-film damping » : ce phénomène régit les pertes d'énergie dans un

film d'air mince compris entre deux structures se rapprochant ou s'éloignant. La modélisation précise de ce phénomène est nécessaire pour déterminer des grandeurs telles que le temps de commutation des micro-interrupteurs. Au chapitre 3, on montre comment ce modèle réduit peut s'intégrer à un modèle couplé de l'ensemble du système. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par des approches pré-existantes. Le chapitre 4 est ensuite consacré à la réduction du coût d'évaluation du modèle du système complet. Ce mémoire s'achève par une conclusion générale synthétisant l'ensemble du travail effectué et dégageant des perspectives de recherche.

# Chapitre 1      Réduction d'ordre de modèles

## 1.1. Introduction

L'intérêt pour les méthodes de réduction d'ordre de modèle a été motivé par l'apparition de systèmes dynamiques d'ordre important, liés à l'émergence du calcul sur ordinateur et des méthodes de résolution numérique du type éléments finis. De telles méthodes pour systèmes non-linéaires d'ordre important ont été plus particulièrement développées dans le cadre de la mécanique des fluides. Une des premières contributions concernant ce domaine est [Sirovich 1987].

Pour poser le problème, nous allons nous intéresser à la dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli encastree-encastree, problème qui nous servira par la suite. L'équation linéaire associée aux conditions aux limites et aux conditions initiales régissant la dynamique du système libre est :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (1-1a)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, w'(0,t) = w'(L,t) = 0 \quad (1-1b)$$

$$w(x,0) = f(x) \quad (1-1c)$$

$w$  est le déplacement vertical de la poutre,  $I$  est le moment d'inertie,  $A$  l'aire de la section  $L$  la longueur,  $E$  le module d'Young,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $x$  la position sur la longueur de la poutre et  $t$  le temps.

On sait que la dynamique du système libre est caractérisée par la superposition des vibrations des modes propres de la poutre. En pratique, on peut ne retenir qu'un nombre fini de modes, la connaissance du système est alors ramenée à la connaissance de  $N_1$  coordonnées modales.  $N_1$  est l'ordre du système. A un instant  $t$  donné, on est passé de l'espace de dimension infinie des fonctions  $w(x)$  de  $[0, L]$  dans  $\mathbf{IR}$  à un espace de dimension finie  $\mathbf{IR}^{N_1}$ . La dynamique sur ces coordonnées modales est donnée par la méthode de Galerkin qui consiste à projeter (1-1a) sur les  $N_1$  modes sélectionnés. On obtient  $N_1$  équations différentielles ordinaires découplées. On peut aussi discrétiser (1-1) dans l'espace et obtenir un modèle différences finies (1-2) d'ordre  $N_2$  généralement très grand devant  $N_1$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = 0, \quad (1-2)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement la matrice de masse et la matrice de raideur associées à la discrétisation effectuée et  $\mathbf{w}$  un vecteur contenant les valeurs de  $w$  aux points de discrétisation. Les vecteurs propres de la paire de matrices  $(\mathbf{M}, \mathbf{K})$  sont aussi les modes propres discrétisés de l'équation (1-1). De même que pour l'équation différentielle partielle, on peut considérer que la dynamique peut être décrite par un nombre fini de modes dominants. Soit une matrice  $\mathbf{V}$  ayant comme vecteurs colonnes les  $N_1$  premiers vecteurs propres de  $(\mathbf{M}, \mathbf{K})$ . On peut alors passer aux coordonnées modales  $\mathbf{z}$  en posant :

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}\mathbf{z}.$$

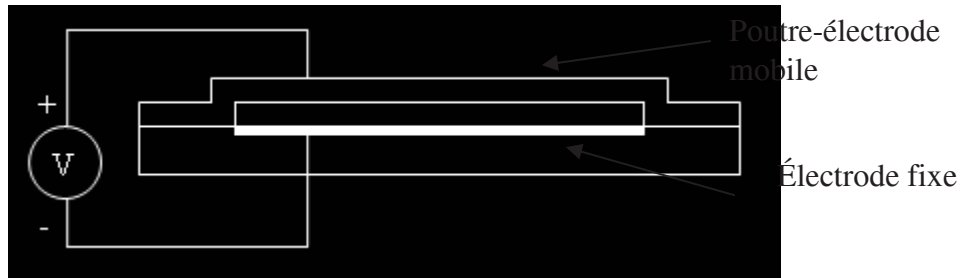
On projette ensuite (1-2) sur le sous espace représenté par les vecteurs de  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{z} = 0, \quad (1-3)$$

où  $\mathbf{V}^T$  est la matrice transposée de  $\mathbf{V}$ .

L'équation obtenue est une approximation numérique de celle obtenue par la projection de (1-1).

Si on introduit maintenant un terme non-linéaire via une excitation électrostatique par une électrode de mêmes dimensions que la poutre, placée en deçà à une distance  $G$ .



**Figure 1-1 Poutre actionnée électrostatiquement**

Avec l'approximation des capacités planes, la densité linéique de force vaut :

$$F_{elec}(x,t) = \frac{\epsilon_0 W V^2}{2} \frac{1}{(G - w(x,t))^2} \quad (1-4)$$

où  $W$  est la largeur de la poutre,  $G$  l'entrefer au repos,  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide,  $V$  la tension appliquée.

Dans le cas de l'équation différentielle partielle, alors que les intégrales dans l'espace résultant de la projection des termes linéaires peuvent être calculées une fois pour toutes, celle impliquant la projection de  $F_{elec}$  nécessite d'être recalculée à chaque pas de temps, ceci passant par un retour aux coordonnées initiales. Les opérations sont exactement les mêmes pour un code différences finies. Ainsi dès que l'équation devient non-linéaire, la méthode de la projection modale perd en partie son intérêt. Il serait intéressant d'établir une méthode permettant de réduire le coût d'évaluation de ces termes non-linéaires.

Nous avons dégagé ici les deux points clés d'une méthode de réduction d'ordre de modèle : le choix d'une base de projection de l'équation originale et le coût d'évaluation des termes non-linéaires. Nous traiterons ces deux problématiques pour les systèmes linéaires dans une première partie puis non-linéaires dans une deuxième partie.

On remarque par ailleurs que contraindre le mouvement à un mode propre linéaire revient à ramener la description du déplacement au déplacement d'un point particulier de la poutre. Connaître le déplacement d'un point particulier de la poutre ou la valeur de la coordonnée modale revient au même. Contraindre le déplacement à un mode propre linéaire revient à contraindre les valeurs du déplacement en différents points de la poutre à être des fonctions linéaires de la valeur du déplacement d'un point choisi. L'approche des modes propres non-linéaires consiste à réduire l'ordre du modèle en établissant des relations invariantes entre des variables d'états maîtres et des variables d'états esclaves. La dynamique du modèle est donc ramenée à la dynamique des variables maîtres. On peut considérer que cette approche étend les modes propres linéaires au domaine non-linéaire. Une troisième partie traitera donc des modes normaux non-linéaires, des différentes approches associées à ce terme ainsi que de son application dans le domaine des microsystemes. La résolution des systèmes couplés sera aussi abordée en fin de chapitre.

De manière plus générale, les critères de qualité d'un modèle d'ordre réduit sont :

- le coût de construction du modèle, qui comprend notamment le coût d'une possible estimation de l'erreur, utile pour optimiser le choix de l'ordre du modèle réduit.
- le coût d'évaluation du modèle.
- la qualité de l'approximation réalisée, ou, au moins, une bonne estimation de l'erreur d'approximation.

On veillera ainsi à présenter les différentes méthodes dans cette perspective.

## **1.2. Réduction d'ordre des systèmes linéaires**

On se base sur la représentation d'état d'un système linéaire d'ordre  $N$  :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{L}^T \mathbf{x} \end{cases}, \quad (1-5)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^N$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{y} \in \mathbf{IR}^q$  le vecteur des variables observées,  $\mathbf{u} \in \mathbf{IR}^p$  le vecteur des entrées,  $\mathbf{C} \in \mathbf{IR}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbf{IR}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{IR}^{N \times p}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbf{IR}^{N \times q}$ . Ce système peut être issu

de la discrétisation dans l'espace via une méthode éléments finis ou différences finies d'un système d'équations différentielles partielles.

On cherche un nombre réduit  $k$  (petit devant  $N$ ) de vecteurs de l'espace d'état qui caractérisent bien la dynamique du système. Autrement dit, on cherche un sous-espace de dimension  $k$  de l'espace dont la base serait constituée des  $k$  vecteurs colonnes d'une matrice  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ . Il s'agit d'y projeter la dynamique du système. On obtient le modèle réduit suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}_k \mathbf{z} &= \mathbf{B}_k \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{L}_k^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (1-6a)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{VZ} \\ \mathbf{C}_k = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \\ \mathbf{G}_k = \mathbf{V}^T \mathbf{G} \mathbf{V} . \\ \mathbf{B}_k = \mathbf{V}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{L}_k^T = \mathbf{L}^T \mathbf{V} \end{cases} \quad (1-6b)$$

[Bai 2002] recense de nombreuses méthodes de choix et de construction d'une base de projection. On présente ici les approches les plus couramment utilisées.

### 1.2.1. Vecteurs propres

La méthode la plus immédiate pour réduire l'ordre d'un modèle consiste à sélectionner  $k$  vecteurs propres de la paire de matrices  $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$ . On obtient des valeurs propres qui peuvent être complexes. La partie imaginaire correspond à la fréquence propre associée au vecteur propre. Dans ce cas on peut sélectionner les vecteurs propres dont les fréquences propres sont proches de la fréquence de fonctionnement du système. On obtient une approximation de la fonction de transfert qui est de bonne qualité dans le domaine recouvrant les fréquences propres sélectionnées et mauvaise ailleurs.

Dans le cas d'un système différentiel du deuxième ordre, il est intéressant de conserver sa forme et d'utiliser les vecteurs propres correspondant aux matrices de raideur et de masse du système. Ils conservent une signification physique que n'auront pas les vecteurs propres du système mis sous forme d'état. Dans le cas où le modèle est utilisé dans un cadre autre que les vibrations, la sélection des vecteurs propres formant la base réduite peut se faire en évaluant leur pertinence dans une simulation statique correspondant au domaine de fonctionnement du système [Gabbay 2000].

### 1.2.2. Approximation de Padé

L'approximation de Padé consiste à trouver un modèle d'ordre réduit  $k$ , tel que les  $2k$  premiers moments de la fonction de transfert du modèle réduit développée autour d'une fréquence  $s_0$  aient la même valeur que ceux du système original.

On s'intéresse aux systèmes SISO (Single Input, Single Output) où l'entrée et la sortie sont de dimension 1.  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{L}$  dans la représentation (1-5) deviennent  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{l}$ . On passe d'abord d'une représentation d'état caractérisée par  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{l}$  à une représentation caractérisée par  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{l}$  où :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = -(\mathbf{G} + s_0 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} \\ \mathbf{r} = -(\mathbf{G} + s_0 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{b} \end{cases} \quad (1-7)$$

Ainsi le système n'est plus caractérisé que par une matrice  $\mathbf{A}$  à la place de deux matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{G}$ . La fonction de transfert est exprimée en fonction de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{l}$ . Il s'agit maintenant de trouver la fonction de transfert du modèle d'ordre réduit  $k$  dont les  $2k$  premiers moments sont égaux à ceux du système original. On ne passe pas par le calcul direct des moments de la fonction de transfert qui est en général un problème mal conditionné qui ne peut être résolu que pour de très petits ordres (petite valeur de  $k$ ). On utilise les sous-espaces de Krylov de dimension  $k$  définis par :

$$\begin{aligned} K_r(\mathbf{A}, \mathbf{r}) &= \text{vect}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{A}^2\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}\} \\ K_r(\mathbf{A}^T, \mathbf{l}) &= \text{vect}\{\mathbf{l}, \mathbf{A}^T\mathbf{l}, (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{l}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{k-1}\mathbf{l}\} \end{aligned} \quad (1-8)$$

Les vecteurs générant les sous-espaces de Krylov contiennent l'information désirée mais ne sont pas pratiquement utilisables comme vecteurs de base. On génère la base de projection via le processus de Lanczos. Ce processus est connu sous le nom de PVL (Padé via Lanczos). Les algorithmes les plus couramment cités sont SyMPVL, PRIMA, MPVL [Bai 2002]. Le processus de Lanczos génère deux bases  $\mathbf{W}_k$  et  $\mathbf{V}_k$ , bases des deux espaces de Krylov (1-8). Ce processus tridiagonalise  $\mathbf{A}$ . Si on l'arrête à la  $k^{\text{ième}}$  étape on obtient une matrice tridiagonale  $\mathbf{T}_k$  à partir de laquelle on définit une fonction de transfert approchée  $H_k(s)$  qui se révèle être l'approximant de Padé de la fonction de transfert originale. Pour le modèle réduit dans le domaine temporel, on passe d'abord par les transformations qui amènent à une représentation en  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{l}$ , puis on fait le changement de variable  $\mathbf{x} = \mathbf{V}_k \mathbf{z}$  puis on projette l'équation de la dynamique sur la base  $\mathbf{W}_k$ .

[Rewienski 2003 B] et [Chen 2004] déterminent la base de Krylov pour un développement autour de la fréquence  $s_0=0$  par le processus d'Arnoldi. Le processus d'Arnoldi ne génère qu'une base qui sert à la fois pour le changement de variable et pour la projection de

l'équation inchangée par rapport à la représentation (1-5). On obtient une approximation locale du modèle dans l'espace des fréquences.

La base de Krylov présente l'inconvénient de ne pas avoir de signification physique à part le premier vecteur qui correspond au système sous contrainte statique dans le cas où on développe la fonction de transfert autour de la fréquence nulle. Un système très peu dissipatif va nécessiter une base de Krylov importante pour couvrir les changements importants de sa fonction de transfert. On peut aussi générer plusieurs bases de Krylov associées à des plages de fréquences différentes.

Se pose le problème du choix de l'ordre  $k$  du modèle d'ordre réduit. Une estimation de l'erreur au cours du processus de Lanczos est proposée dans [Bai 2002] afin de décider du point d'arrêt. Une autre approche mentionnée consiste à considérer le modèle réduit comme un modèle complet perturbé, ce qui est appelé « backward error analysis ». Des méthodes de traitement a posteriori du système (méthode PVL $\pi$ ) ont été mises au point pour conserver la stabilité et la passivité au système.

### 1.2.3. Troncature balancée

Une autre méthode courante de réduction d'ordre de modèle est la troncature balancée [Scherpen 1993] [Rowley 2005]. Pour un système linéaire ou non-linéaire, cette méthode repose sur la définition de fonctions de commandabilité et d'observabilité, qui sont des fonctions de l'état du système. La fonction de commandabilité traduit l'énergie nécessaire pour atteindre un certain état à partir de conditions initiales définies, la fonction d'observabilité traduit l'énergie de sortie pour un état initial donné et une entrée nulle. Elles permettent de caractériser l'importance relative de différents états. Cette information peut servir à sélectionner des états pour établir une base de projection pour un modèle réduit.

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre  $N$  défini par (1-9), ces fonctions peuvent s'exprimer simplement par le biais de deux matrices, les grammiens de commandabilité  $\mathbf{W}_c$  et d'observabilité  $\mathbf{W}_o$  (1-10), qui sont les solutions des équations de Lyapunov (1-11).  $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^N$  est l'état du système,  $\mathbf{u} \in \mathbf{IR}^p$  les entrées et  $\mathbf{y} \in \mathbf{IR}^q$  les sorties.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1-9)$$

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt \quad \mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}^* \mathbf{C} e^{\mathbf{A}^*t} dt \quad (1-10)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^* + \mathbf{B} \mathbf{B}^* = 0 \quad \mathbf{A}^* \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^* \mathbf{C} = 0 \quad (1-11)$$



où  $\mathbf{A}^*$  est la matrice transposée conjuguée de  $\mathbf{A}$ .

L'énergie à fournir en entrée pour atteindre un état  $\mathbf{x}_1$ , l'état initial étant l'équilibre du système, est alors donnée par :

$$\mathbf{x}_1^* \mathbf{W}_c \mathbf{x}_1 \quad (1-12a)$$

L'énergie en sortie pour un état initial  $\mathbf{x}_0$  et une entrée nulle est :

$$\mathbf{x}_0^* \mathbf{W}_o \mathbf{x}_0 \quad (1-12b)$$

Si le système est observable et commandable, il existe une base de l'espace d'état dans laquelle les grammians de commandabilité et d'observabilité sont diagonalisables et égaux :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{W}_c \mathbf{T}^{-1*} = \mathbf{T}^* \mathbf{W}_o \mathbf{T} = \Sigma \quad (1-13)$$

On effectue le changement de variable  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ . Les éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  de la matrice diagonale  $\Sigma$  sont appelées les valeurs singulières de Hankel. Les états correspondant aux valeurs les plus importantes sont les états à la fois les plus commandables et les plus observables. La base de projection pour le modèle réduit est alors donnée par les  $k$  premiers états correspondant aux valeurs de Hankel les plus importantes.

D'après [Rowley 2005], l'erreur sur la fonction de transfert de ce modèle est proche de la plus petite erreur que l'on puisse avoir pour un système réduit d'ordre donné  $k$ . Une bonne estimation de l'erreur est donnée par:

$$\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\text{rom}}\|_{\infty} < 2 \sum_{i=k+1}^N \sigma_i \quad (1-14)$$

où  $\mathbf{G}$  est la fonction de transfert. Cette méthode est souvent utilisée en contrôle car elle fait intervenir de façon prononcée le comportement entrée-sortie du système.

[Rowley 2005] développe une méthode qu'il appelle décomposition propre orthogonale balancée qui correspond à une méthode numérique permettant de réaliser la troncature balancée sans passer par la résolution des équations de Lyapunov, tout en obtenant les mêmes résultats. Il fait également le rapport entre cette méthode et la décomposition propre orthogonale que nous verrons au paragraphe 1.3.2.1. Les fonctions de bases sont déterminées directement à partir des réponses impulsionnelles du système sans avoir à calculer les grammians. Cette méthode a été appliquée par [Vasilyev 2003] dans le cadre d'une poutre actionnée électrostatiquement.

Un modèle réduit par la méthode de la troncature balancée est nécessairement stable. L'équivalence entre la décomposition propre orthogonale balancée et la troncature balancée permet de garantir la stabilité du modèle réduit issu de la décomposition propre orthogonale.

### 1.2.4. Comparaison

La détermination des grammiens dans la méthode de la troncature balancée, qu'elle soit issue de la résolution rigoureuse des équations de Lyapunov ou de simulations du système complet est coûteuse alors que la détermination de l'approximant de Padé via les algorithmes décrits par Bai est plus directe. L'approximant de Padé ne donne néanmoins qu'une approximation locale dans l'espace des fréquences alors que la troncature balancée couvre a priori tout le spectre. Des bases de Krylov peuvent toutefois être générées autour de différentes fréquences. Un modèle réduit issu de la troncature balancée est nécessairement stable alors qu'une projection sur une base de Krylov nécessite parfois des traitements a posteriori afin de garantir la stabilité.

## 1.3. Réduction d'ordre des systèmes non-linéaires

### 1.3.1. Généralités

De la même manière que pour un système linéaire, on va chercher un sous-espace de l'espace d'état sur lequel projeter la dynamique du système.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1-15).$$

On rappelle que ce système de grand ordre est en général issu de la discrétisation spatiale d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Après projection du système d'équations différentielles ordinaires (1-15) sur un sous espace de l'espace des phases caractérisé par la base  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  de dimension  $k \ll N$  on obtient un système d'ordre réduit de la forme (1-16) :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\mathbf{V}\mathbf{z}) + \mathbf{V}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{z} \end{cases} \quad (1-16)$$

L'évaluation des termes non-linéaires  $\mathbf{f}(\mathbf{V}\mathbf{z})$  nécessitant le retour aux coordonnées initiales reste très coûteuse. Les deux points clés sont donc la base de projection et éventuellement le choix d'une méthode qui réduit le coût de calcul de ces termes non-linéaires.

### 1.3.2. Choix d'une base de projection

Le choix de la base de projection peut se faire par les méthodes décrites pour les systèmes linéaires à partir du modèle linéarisé autour d'un état d'équilibre. Les modes propres linéaires

de la structure mécanique sont par exemple souvent utilisés [Anantasuresh 1996], [Gabbay 2000]. [Gabbay 2000] prend l'exemple d'une poutre encastrée-encastrée et utilise comme base de projection un certain nombre de modes linéaires. Il établit une expression approchée de l'énergie mécanique non-linéaire fonction des coordonnées modales à partir de données issues de simulations éléments finis. Il constate que cette méthode ne permet pas de rendre compte correctement de la raideur de la structure. Les effets des contractions de Poisson sur l'énergie du système ne sont en effet pas correctement pris en compte lorsqu'on réduit la dynamique aux modes linéaires. Ainsi il est aussi pertinent de chercher à tenir compte des non-linéarités du système dans l'établissement de la base de projection.

### 1.3.2.1. Décomposition propre orthogonale (POD)

On retrouve aussi cette méthode sous le nom de méthode de Karhunen-Loève ou de POD (Proper Orthogonal Decomposition). Elle a été, à l'origine, développée dans le cadre de la mécanique des fluides, dont les systèmes sont de très grand ordre et non-linéaires [Sirovich 1987]. Soit un système régi par une équation aux dérivées partielles dont on cherche la solution  $b(x,t)$ , définie sur le domaine spatial  $\Omega$ . [Sirovich 1987] introduit la fonction de corrélation du processus régi par l'EDP :

$$K(x, x') = \langle b(x,t)b(x',t) \rangle \quad (1-17)$$

où  $\langle \rangle$  représente l'opérateur moyenne sur le temps.

Il cherche alors les fonctions propres de l'opérateur intégral suivant :

$$\int K(x, x')v(x')dx' = \lambda v(x) \quad (1-18)$$

Ces fonctions maximisent la quantité suivante :

$$\langle (v(x), b(x,t))^2 \rangle \quad (1-19)$$

où le produit scalaire est défini par  $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ . Ce terme correspond donc à

l'énergie moyenne du système projeté sur la fonction propre  $v(x)$ . La difficulté consiste à déterminer ces fonctions propres pour des systèmes discrétisés dont le nombre de variables d'état est alors de grand ordre. On est ramené à un problème aux valeurs propres dont la dimension est trop importante. [Sirovich 1987] introduit alors la méthode des instantanés qui ramène le problème à la détermination des vecteurs propres d'une matrice dont la dimension est le nombre d'instantanés relevés  $M$ . Plus précisément, si on relève  $M$  vecteurs d'état à des

intervalles de temps égaux  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_M\}$ , on est ramené à la détermination des vecteurs propres  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M\}$  de la matrice  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  où les colonnes de  $\mathbf{B}$  sont constituées des instantanés relevés. La fonction de corrélation peut s'écrire :

$$K(x, x') = \frac{1}{T} \int_0^T b(x, t) b(x', t) dt \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M b_k(x) b_k(x') \quad (1-20)$$

Les fonctions propres  $v(x)$  peuvent alors s'exprimer comme une combinaison linéaire des instantanés :

$$v(x) = \sum_{k=1}^M w_k b_k(x) \quad (1-21)$$

Si on remplace (1-20) et (1-21) dans (1-18) on obtient un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{C} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w} \quad (1-22)$$

où  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$

$$\text{et } C_{ij} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} b_i(x) b_j(x) \approx \frac{1}{M} \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j$$

Les vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  qui correspondent aux fonctions de bases cherchées sont donnés par :

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{B} \mathbf{w}_k \quad (1-23)$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  sont des vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  de dimension  $N$ , l'ordre du système discrétisé.

Une autre manière de traiter le problème est de réaliser une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{B}$ . On écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \mathbf{E} \mathbf{W}^T \quad (1-24)$$

$$\text{où } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \\ \dots \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{V} \text{ et } \mathbf{W} \text{ sont des}$$

matrices orthogonales contenant les vecteurs propres  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}, \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M\}$  mentionnés précédemment [Hung *et al.* 1999].

Les vecteurs de la base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M\}$  sont les vecteurs qui minimisent l'erreur de projection  $Er$  des instantanés sur une base de dimension  $M$ .

$$Er(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M) = \sum_{i=1}^M \left| \mathbf{b}_i - \text{proj}(\mathbf{b}_i, \text{sub}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M)) \right|^2 \quad (1-25)$$

Le vecteur le plus important correspond dans les deux cas (1-22) et (1-24) au vecteur associé à la plus grande valeur propre.

D'après [Sirovich 1987], en mécanique des fluides, le nombre d'instantanés à extraire correspond à peu près aux nombres de modes nécessaires pour que l'énergie de la solution projetée soit au moins égale à 99% de l'énergie totale de la solution. Il propose une méthode où il partitionne les  $M$  instantanés en lot de  $Q$  vecteurs sur chacun desquels il effectue une décomposition propre orthogonale. Il fait ensuite la moyenne des vecteurs obtenus sur les différents lots. [Hung 1999] construisent une base qui comprend jusqu'à 3 modes mécaniques et 3 modes de pression pour une poutre actionnée électrostatiquement soumise à l'amortissement d'un film d'air comprimé à partir de 400 instantanés issus de simulations pour 4 échelons de tension différents. La construction du modèle réduit nécessite donc des données issues d'expériences ou de simulations numériques, ce qui engendre un coût de départ important.

On peut avoir une idée de la validité du modèle réduit, sachant que la fraction de l'énergie du système contenue dans le sous-espace est :

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i}, \quad (1-26)$$

où  $k$  est le nombre de vecteurs sélectionnés pour la base réduite parmi les  $M$  obtenus. Toutefois les vecteurs d'état correspondant à la plus grande énergie ne représentent pas toujours bien la dynamique du système notamment en mécanique des fluides, où certains états de basse énergie sont très importants dynamiquement. Ce problème ne semble pas apparaître dans le cas d'une poutre actionnée électrostatiquement qui nous intéresse particulièrement ici [Hung 1999].

Les résultats de cette méthode dépendent clairement des données expérimentales ou de la simulation et du produit scalaire utilisés. L'approximation de la dynamique du système initial n'a qu'une validité locale dans l'espace des phases dépendant du choix des trajectoires d'apprentissage.

[Rowley 2005] fait le lien entre la POD et la troncature balancée, qui se révèle être une décomposition propre orthogonale pour un produit scalaire faisant intervenir le grammien d'observabilité et des données particulières correspondant aux réponses impulsionnelles. On

peut utiliser ces liens pour analyser notamment la stabilité du système dans le cadre de la POD.

### 1.3.2.2. Troncature balancée

La méthode de la troncature balancée évoquée précédemment pour des systèmes linéaires peut être étendue à des systèmes non-linéaires en calculant les grammien empiriquement à partir de données réelles ou simulées [Lall 2002]. Ces données correspondent à des simulations/expériences précisées :

- entrées impulsionnelles pour le grammien de commandabilité.
- conditions initiales définies et entrées nulles pour le grammien d'observabilité.

Il est prouvé que si l'on considère un système linéaire, les grammien calculés à partir de ces données correspondent bien aux grammien théoriques, ils sont solution de l'équation de Lyapunov. Dans le cas d'un système non-linéaire, on peut utiliser des entrées autres que des entrées impulsionnelles afin de mettre en relief certaines caractéristiques non-linéaires.

Le coût de construction du modèle paraît assez important à cause des simulations nécessaires au calcul des grammien.

### 1.3.2.3. Concaténation de bases de Krylov

Le modèle de [Rewiński 2003 B] est un modèle linéarisé par morceaux. Le modèle est linéarisé autour de différents points de l'espace des phases. La base de projection choisie est tout d'abord une base de Krylov (cf §1.2.2) construite à partir du modèle linéarisé autour de l'état d'équilibre. Un point d'équilibre pour un système non-linéaire défini par (1-15) et une entrée nulle est un point  $\mathbf{x}_0$  pour lequel  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Il est stable si lorsque l'état du système est déplacé dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ , il reste au voisinage du point d'équilibre. Les points d'équilibre considérés seront toujours stables. Dans un deuxième temps il cherche à optimiser le choix de cette base en construisant des bases de Krylov pour chaque point de linéarisation choisi. Le modèle linéarisé autour d'un point quelconque  $\mathbf{x}_i$  s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{JF}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (1-27)$$

où  $\mathbf{JF}$  est la matrice jacobienne de la fonction  $\mathbf{f}$  au point  $\mathbf{x}_i$ .

La base de Krylov tient compte de la distribution de l'entrée  $\mathbf{B}$ . On remarque que pour les points qui ne correspondent pas à un point d'équilibre, si l'on essaye d'identifier à un système linéaire du type (1-9), il y a un terme  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{J}\mathbf{F}_i\mathbf{x}_i$  supplémentaire qu'on peut associer à une distribution de l'entrée  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{u}'$  étant un échelon de valeur 1. De ce fait [Rewienski 2003 B] construit deux bases de Krylov associée à deux distributions du vecteur d'entrée, l'une associée à  $\mathbf{u}$ , l'autre à un échelon de valeur 1. Il concatène ensuite les bases construites pour chaque point de linéarisation. Il orthogonalise cette base en réalisant une décomposition en valeurs singulières et en supprimant les vecteurs aux valeurs singulières les plus faibles pour obtenir la base de projection finale.

A dimension de base égale, les résultats sont meilleurs pour une concaténation d'un ensemble de base de Krylov issues de différents points de linéarisation, que pour la base de Krylov issue du modèle linéarisé autour de l'équilibre.

### **1.3.3. Evaluation des termes non-linéaires**

#### **1.3.3.1. Utilisation d'un développement limité**

On peut faire un développement de Taylor de la fonction  $\mathbf{f}$ . On ne dépasse en général pas l'ordre 2 car le coût d'évaluation du modèle est de l'ordre de  $k^{q+1}$ ,  $k$  ordre du modèle réduit,  $q$  étant l'ordre du développement de Taylor. [Bai 2002] mentionne aussi des structures de modèle bilinéaire. Ces méthodes ne sont valables que pour des systèmes faiblement non-linéaires. Pour un micro-interrupteur, par exemple, elles ne permettent pas de rendre compte des non-linéarités dues aux grands déplacements [Chen 2004].

#### **1.3.3.2. Utilisation d'une approximation de $\mathbf{f}$**

Une autre possibilité est d'établir des approximations des termes non-linéaires en fonction des coordonnées réduites à partir de données issues de simulation ou d'expériences. Ceci induit une augmentation du coût de la construction du modèle mais accélère l'étape d'évaluation.

[Gabbay 1998] développe cette méthode en établissant des expressions approchées des énergies dans les différents domaines. Il s'intéresse à une structure mécanique actionnée électrostatiquement dans le cadre conservatif.

Le modèle réduit est obtenu en exprimant, en fonction des coordonnées modales  $(q_1, q_2, \dots, q_k)$ , l'énergie élastique, l'énergie cinétique et l'énergie électrostatique du système. Les équations du mouvement sont alors obtenues par la méthode de Lagrange. Il faut

établir la forme de la fonction d'approximation (polynôme, etc...) ce qui peut se faire à partir de connaissances a priori. Dans un second temps, il faut optimiser les séries de simulations à faire pour obtenir les données à partir desquelles l'approximation est faite ou autrement dit choisir pertinemment des points dans l'espace des coordonnées réduites. Cette étape est grandement facilitée par le fait que chaque domaine énergétique est traité indépendamment. Par exemple pour le domaine électrostatique, il cherche une fonction d'approximation de la capacité sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$C(q_1, q_2, \dots, q_k) = \frac{\sum_{i_1=1}^{R_1} \sum_{i_2=1}^{R_2} \dots \sum_{i_k=1}^{R_k} a_{i_1 i_2 \dots i_m} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m}}{\sum_{i_1=1}^{S_1} \sum_{i_2=1}^{S_2} \dots \sum_{i_k=1}^{S_k} b_{i_1 i_2 \dots i_m} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m}} \quad (1-28)$$

L'espace des phases est un volume de  $\mathbb{R}^k$  défini par le domaine de fonctionnement du système. Il s'agit de choisir des points dans ce volume. [Gabbay 1998] pourrait quadriller uniformément cet espace, il choisit une méthode plus complexe. Il subdivise uniformément ce volume en sous-volumes puis choisit au hasard des points dans chacun de ces sous-volumes de façon toutefois à uniformiser le nombre de points choisis dans chaque sous-volume.

### 1.3.3.3. Linéarisation par morceaux

Cette méthode consiste à linéariser le modèle autour de différents points dans l'espace des phases qui ne sont pas uniquement des points d'équilibre. On présente ici le modèle linéaire par morceaux basé sur une trajectoire d'apprentissage (TPWL : Trajectory PieceWise Linear) de [Rewiński 2003 B] [Rewiński 2005]. Le modèle linéarisé par morceaux a la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{s-1} p_i(\mathbf{x}) [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{JF}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)] + \mathbf{Bu} \quad (1-29)$$

où les poids  $p_i$  des différents modèles linéaires dépendent uniquement de la distance du point

courant  $\mathbf{x}$  aux points de linéarisation  $\mathbf{x}_i$  et vérifient  $\sum_{i=0}^{s-1} p_i(\mathbf{x}) = 1$  pour tout  $\mathbf{x}$ .

Rewiński *et al.* utilisent ensuite la méthode de Galerkin. La base de projection est  $\mathbf{V}$ , la variable d'état devient  $\mathbf{z}$ , vecteur des coordonnées modales. On a  $\mathbf{x} = \mathbf{Vz}$ . Cette base peut être une base de Krylov issue de la concaténation de bases déterminées à partir des modèles



linéarisés autour de différents points (cf §1.3.2.3), une base issue de la troncature balancée [Vasilyev 2003] ou tout autre base. Le modèle d'ordre réduit final a la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^{s-1} p_i(\mathbf{z})[\mathbf{V}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{V}^T \mathbf{A}_i (\mathbf{V}\mathbf{z} - \mathbf{x}_i)] + \mathbf{V}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{V}\mathbf{z} \end{cases} \quad (1-30)$$

tel que  $\sum_{i=0}^{i=s-1} p_i(\mathbf{z}) = 1$  pour tout  $\mathbf{z}$ .

Une démarche simple consisterait à prendre  $p_i(\mathbf{z})$  à 1 pour le point de linéarisation  $i$  le plus proche de  $\mathbf{V}\mathbf{z}$ , les autres poids étant nuls. Ici la démarche utilisée est plus complexe et assure une meilleure continuité des poids dans le temps. Des conditions mises sur les poids permettent aussi une certaine flexibilité sur laquelle il est possible de jouer pour assurer la stabilité et /ou la passivité du système.

En pratique, la dimension de l'espace réduit est trop importante pour que les points de linéarisation soient choisis par simple discrétisation uniforme de l'espace. Ainsi ils sont choisis le long de trajectoires d'apprentissages les plus pertinentes possibles. Deux méthodes sont utilisées pour déterminer les points de linéarisation. L'une consiste à utiliser le modèle original et à définir un nouveau point de linéarisation quand l'état courant est trop loin de tous les points de linéarisation déjà définis. L'autre consiste à simuler le modèle en partant du modèle linéarisé à l'origine et projeté sur la base de Krylov associée. Quand Rewienski et al. atteignent un état trop éloigné de l'état initial, ils définissent un nouveau point de linéarisation, déterminent la base de Krylov associée et réactualisent la base de projection par concaténation. Ils utilisent ensuite le modèle linéarisé autour de ce nouveau point et projeté sur la base actualisée pour poursuivre la simulation (et ainsi de suite). Ainsi les simulations des trajectoires d'apprentissage sont faites à coût réduit également. Une démarche ayant prouvé son efficacité consiste à prendre en compte une estimation de l'erreur plutôt que le simple critère de distance pour le choix des points au cours de cette construction.

Le coût d'évaluation est inférieur à  $O(sk^2)$ , où  $s$  est le nombre de points de linéarisation et  $k$  l'ordre du modèle. En pratique il sera insensible à  $s$ , étant donné que seuls un ou deux poids sont non nuls pour un  $\mathbf{z}$  donné.

#### **1.3.3.4. Comparaison des différentes approches**

Dans la méthode de Gabbay *et al.*, les simulations d'apprentissage sont faites à coût réduit grâce au découplage des domaines. Il sera en général possible de construire le modèle à partir de simulations couvrant tout l'espace des phases qui nous intéresse, rendant, du même coup, ce modèle valide sur cet espace en question. Ce sont de plus des simulations statiques. C'est l'avantage d'utiliser une approche énergétique qui n'est néanmoins applicable que dans le cas conservatif. Pour [Rewiński 2003 B] les domaines ne sont pas découplés, mais la linéarisation par morceau appliquée dès les simulations d'apprentissage dynamiques réduit le coût de construction du modèle. Il sera par contre très difficile de couvrir l'espace des phases complet qui est alors de grande dimension, le modèle résultant n'en sera que plus dépendant en la trajectoire d'apprentissage. Ceci est l'inconvénient principal de ce type de modèle.

D'autre part, le coût d'évaluation du modèle linéarisé par morceaux est intéressant par rapport à un modèle basé sur un développement de Taylor pour lequel le coût d'évaluation devient rapidement trop important. On ne dépasse en effet pas l'ordre 3. Ainsi la linéarisation par morceau présente un véritable intérêt quand à l'approximation des termes non linéaires.

#### **1.3.4. Stabilité, passivité.**

Les questions d'évaluation de l'erreur, de préservation de la stabilité et de la passivité du système sont traitées en détails dans [Rewiński 2005], pour une catégorie de systèmes ayant des propriétés particulières. La fonction  $f$  non-linéaire est considérée Lipschitz-continue et négative-monotone. Cela exclut de facto certains systèmes que l'on serait susceptible d'étudier (systèmes à hystérésis). Il présente des conditions pour que la projection du système conserve la stabilité puis pour que la linéarisation par morceaux n'engendre pas l'apparition d'instabilités ou de points de stabilité artificiels. Son étude aboutit à une condition sur les poids ou à l'ajout d'un terme dissipatif pour certains états. C'est la seule méthode, avec le cas de la base de Krylov pour les systèmes linéaires, pour laquelle ces problèmes ont été étudiés.

### **1.4. Modes propres non-linéaires.**

#### **1.4.1. Introduction**

Les modes normaux non-linéaires (MNNs) ont été particulièrement étudiés dans le cadre des systèmes oscillants libres et conservatifs. Dans le cas d'un système vibratoire linéaire libre, il

existe des modes propres du système qui ont une propriété d'invariance. C'est-à-dire que si les conditions initiales correspondent à l'excitation d'un seul mode, le mouvement du système restera décrit par ce seul mode. De plus, dans le cadre linéaire, le principe de superposition est valable. Ainsi le mouvement peut être décrit par une superposition de quelques modes découplés les uns des autres. La dynamique du système est ainsi simplement et exactement décrite. On peut aussi considérer qu'on a établi un modèle d'ordre réduit d'un système oscillant linéaire.

On peut utiliser les modes propres linéaires d'un système pour établir un modèle d'ordre réduit d'un système non-linéaire par une méthode de Galerkin par exemple. Les modes sont alors couplés par les termes non-linéaires, le théorème de superposition ne s'applique plus. Cette méthode est couramment utilisée. Il s'avère que l'utilisation d'un nombre trop faible de modes linéaires peut donner des résultats qui sont qualitativement faux concernant le comportement raidissant ou assouplissant par exemple. Ainsi deux solutions sont possibles : augmenter le nombre de modes linéaires pris en compte, ou tenir compte des non-linéarités du modèle dans l'établissement de modes propres.

[Rosenberg 1966] définit physiquement un mode normal non-linéaire (MNN) comme une oscillation synchrone d'une structure où tous les points matériels passent par leur équilibre statique et atteignent leur déplacement maximum simultanément. Il estime alors qu'il peut ramener la dynamique à un seul point matériel, considérant qu'il existe des relations invariantes dans le temps entre les variables déplacement des points matériels non retenus et celle du point choisi pour décrire la dynamique. Ce sont ces relations qui définissent le mode normal non-linéaire.

Par exemple, on considère une poutre dont on discrétise l'espace. On obtient  $N$  nœuds. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, imposer que le mouvement soit décrit par un mode propre linéaire, c'est à dire qu'il soit ramené à une seule variable à savoir la coordonnée modale, revient dans les faits à imposer des relations linéaires entre le déplacement d'un point de la poutre, point « maître », et les autres.

$$x_i = \alpha_i x_M, i = 1, \dots, N \quad (1-31)$$

où  $x_i$  est le déplacement du  $i^{\text{ème}}$  nœud de la poutre et  $x_M$  le déplacement du nœud « maître ».

Décrire le mouvement par la coordonnée modale ou par le déplacement d'un seul point revient au même. Dans le cas non-linéaire, la forme du mode dépend de l'amplitude du déplacement  $x_M$ , c'est à dire que les  $x_i$  deviennent des fonctions non-linéaires de  $x_M$ . Dans ce sens, on peut considérer les modes propres non-linéaires comme une extension des modes

propres linéaires. Cette description sous-entend qu'on suppose les coordonnées déplacement et vitesse découplées, i.e. que les  $x_i$  ne dépendent que de  $x_M$  et pas de sa dérivée par rapport au temps. Ce n'est pas toujours le cas. En effet, le vecteur d'état d'un système quelconque du deuxième ordre contient les variables déplacements et vitesse. [Shaw 1994] cherche à décrire le système par le déplacement et la vitesse d'un seul point d'une poutre. Les déplacements esclaves seront donc aussi fonction de la vitesse du point maître choisi. Cette approche est plus difficile à saisir du point de vue physique.

Ainsi l'approche des modes normaux non-linéaires consiste à chercher des relations invariantes dans le temps entre des variables maîtres et des variables esclaves. Ces relations invariantes définissant des variétés dans l'espace des phases du système. Ces relations étant difficiles à établir, des a priori devront être faits sur le système.

On distinguera deux approches, celles basées sur les variables physiques du système à savoir déplacement et vitesse et celles basées sur les coordonnées modales. Ces dernières s'appuient sur un modèle établi par la méthode de Galerkin et consistent à le ramener à un seul mode. Les modèles basés sur les modes normaux non-linéaires seront ainsi en général d'ordre deux, d'ordre quatre maximum dans le cas de résonance interne où certains modes sont indissociables. On décrira plusieurs exemples de la littérature afin de dégager les enjeux de cette approche.

### 1.4.2. Equation régissant les variétés invariantes

Il s'agit ici de déterminer le système d'équations aux dérivées partielles régissant les variétés invariantes. On traite ici l'exemple d'un système continu dans l'espace mais la démarche sera exactement la même pour un système discrétisé.

Soit un système continu régi par le système d'équations différentielles partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} = v(s,t) \\ \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = F(u(s,t), v(s,t)) \end{cases} \quad (1-32a)$$

associé aux conditions limites

$$B(u(s,t), v(s,t)) = 0, \quad (1-32b)$$

$s$  étant la variable spatiale et  $t$  le temps. On cherche à ramener la dynamique à un point matériel soit à deux variables  $u_0(t) = u(s_0, t)$  et  $v_0(t) = v(s_0, t)$ .

Les variétés invariantes  $U$  et  $V$  à déterminer sont alors définies par :

$$\begin{cases} u(s,t) = U(u_0(t), v_0(t), s, s_0) \\ v(s,t) = V(u_0(t), v_0(t), s, s_0) \end{cases} \quad (1-33)$$

En éliminant le temps dans (1-32a) on obtient les équations aux dérivées partielles régissant les variétés U et V.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= V = \frac{\partial U}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial U}{\partial v_0} [F(U, V)]_{s=s_0} \\ F(U, V) &= \frac{\partial V}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} [F(U, V)]_{s=s_0} \end{aligned} \quad (1-34)$$

Ce sont ces équations que l'on cherche à résoudre pour déterminer les variétés, à savoir les relations entre les variables maîtres et esclaves.

### 1.4.3. Détermination des variétés

#### 1.4.3.1. Développement asymptotique

##### *a. Modèle de poutre [Shaw 1994]*

[Shaw 1994] développe la méthode des MNNs pour un système continu, ici une poutre. Il cherche une solution aux EDPs définissant les variétés sous la forme d'un développement asymptotique. Trois exemples sont traités. On va détailler les deux premiers, l'un concernant le cas linéaire, l'autre le cas non-linéaire.

Le premier exemple concerne le cas d'une poutre dont le comportement dynamique est régi par l'équation d'Euler Bernoulli linéaire.

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (1-35)$$

On choisit comme variable spatiale la variable spatiale normalisée  $s \in [0,1]$ . Les conditions limites correspondent à un pivot, c'est-à-dire déplacement nul et moment nul soit :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(0,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (1-36)$$

Les variétés sont supposées de la forme (1-37), c'est-à-dire linéaires en  $u_0, v_0$  :

$$\begin{aligned} U(u_0, v_0, s, s_0) &= a_1(s, s_0)u_0 + a_2(s, s_0)v_0 \\ V(u_0, v_0, s, s_0) &= b_1(s, s_0)u_0 + b_2(s, s_0)v_0 \end{aligned} \quad (1-37)$$

où

$$u_0(t) = u(s_0, t) \text{ et } v_0(t) = v(s_0, t).$$

et

$$\begin{cases} u(s, t) = U(u_0(t), v_0(t), s, s_0) \\ v(s, t) = V(u_0(t), v_0(t), s, s_0) \end{cases}$$

Utilisant le fait que, pour un système conservatif non-gyroscopique, le déplacement et la vitesse ne sont pas couplés ( $a_2 = b_1 = 0$ ), il résout les équations différentielles partielles régissant les coefficients des variétés invariantes.

Il retrouve assez logiquement le résultat des modes propres linéaires soit :

$$U_n(u_0(t), v_0(t), s, s_0) = \frac{\sin(n\pi.s)}{\sin(n\pi.s_0)} u_0(t) \quad (1-38)$$

Si on considère que la dynamique est décrite par le  $n^{\text{ième}}$  mode propre linéaire  $\sin(n\pi.s)$  normalisé par la constante  $\alpha_n$ ,  $a(t)$  coordonnée modale :

$$u_n(s, t) = a(t)\alpha_n \sin(n\pi.s) \quad (5-8)$$

On retrouve bien le résultat ci-dessus si on réécrit :

$$u_n(s, t) = a(t)\alpha_n \sin(n\pi.s_0) \frac{\sin(n\pi.s)}{\sin(n\pi.s_0)} \quad (1-39a)$$

$$\text{Car } u_0(t) = u_n(s_0, t) = a(t)\alpha_n \sin(n\pi.s_0) \quad (1-39b)$$

Pour établir la dynamique en  $u_0, v_0$ , il faut écrire les équations différentielles partielles au point  $s_0$  en utilisant la relation d'invariance établie.

$$\left. \frac{d^2 u_0}{dt^2} - F\left(u(s, t), \frac{\partial u(s, t)}{\partial t}\right) \right|_{s=s_0} = 0 \quad (1-40a)$$

Soit dans ce cas :

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{(n\pi)^4}{L^4} u_0 = 0 \quad (1-40b)$$

On retrouve en tous points le résultat des modes propres linéaires.

Dans le deuxième exemple, [Shaw 1994] introduit une non-linéarité cubique via un support. Les conditions limites restent les mêmes, c'est-à-dire un pivot. De même on choisit la variable

$s$  normalisée et on suppose  $\frac{EI}{\rho AL^4} = 1$ . L'équation de la poutre se ramène simplement à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} - ku - \mathcal{U}^3 \quad (1-41)$$

[Shaw 1994] ne fait pas dans ce cas l'hypothèse du découplage des variables position et vitesse. On cherche alors une solution sous la forme d'un développement limité à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
U(u_0, v_0, s, s_0) &= a_1(s, s_0)u_0 + a_2(s, s_0)v_0 + a_3(s, s_0)u_0^2 + a_4(s, s_0)v_0^2 + a_5(s, s_0)u_0v_0 \\
&+ a_6(s, s_0)u_0^3 + a_7(s, s_0)v_0^3 + a_8(s, s_0)u_0v_0^2 + a_9(s, s_0)u_0^2v_0 \\
V(u_0, v_0, s, s_0) &= b_1(s, s_0)u_0 + b_2(s, s_0)v_0 + b_3(s, s_0)u_0^2 + b_4(s, s_0)v_0^2 + b_5(s, s_0)u_0v_0 \\
&+ b_6(s, s_0)u_0^3 + b_7(s, s_0)v_0^3 + b_8(s, s_0)u_0v_0^2 + b_9(s, s_0)u_0^2v_0
\end{aligned} \tag{1-42}$$

On écrit le système d'équation aux dérivées partielles régissant les variétés. On égalise successivement les coefficients des termes de différent ordre en  $u_0, v_0$  on obtient des systèmes d'équations au dérivées ordinaires. Au premier ordre, [Shaw 1994] retrouve les modes propres linéaires. Au deuxième ordre, les équations ne dépendant pas de  $\gamma$ , on retient la solution triviale nulle, afin de garantir que l'on retrouve bien la solution linéaire si  $\gamma=0$ . Au troisième ordre, les équations permettent dans un premier temps d'exprimer simplement les coefficients  $b_i$ ,  $i = 6, \dots, 9$  liés à l'expression de la vitesse en fonction des coefficients  $a_i$ ,  $i = 6, \dots, 9$  liés à l'expression de la position. On retient la solution triviale pour les coefficients  $a_7$  et  $a_8$  étant régis par des équations différentielles partielles indépendantes de la non-linéarité. La variable position s'écrit alors :

$$u(s, t) = a_1(s)u_0 + a_6(s)u_0^3 + a_8(s)u_0v_0^2 \tag{1-43}$$

On a déterminé  $a_1$ . On cherche pour  $a_6, a_8$  les solutions particulières sous la forme:

$$\begin{aligned}
a_6(s) &= \beta_1 \sin(n\pi s) + \beta_3 \sin(3n\pi s) \\
a_8(s) &= \eta_1 \sin(n\pi s) + \eta_3 \sin(3n\pi s)
\end{aligned} \tag{1-44}$$

un des deuxièmes membres contenant le terme  $a_1$  à l'ordre 1 et 3, l'autre étant nul. Par projection sur  $\sin(n\pi s)$  et  $\sin(3n\pi s)$ , on obtient 4 équations linéaires sur les coefficients  $(\beta_1, \beta_3, \eta_1, \eta_3)$ . Le déterminant de ce système d'équations est nul si on a la relation suivante :

$$k = 9.(n\pi)^4. \tag{1-45}$$

On est dans le cas de la résonance interne. Les modes  $n$  et  $3n$  sont couplés. Les modes sont alors à déterminer à partir de 4 variables maîtres.

Dans les autres cas, on trouve simplement l'expression des coefficients  $(\beta_1, \beta_3, \eta_1, \eta_3)$ .

La dynamique sur  $u_0$  s'écrit alors sous la forme :

$$\ddot{u}_0 + \omega_{0n}^2 u_0 + A_n u_0^3 + B_n u_0 \dot{u}_0^2 = 0 \tag{1-46}$$

Shaw traite un troisième exemple qui est celui d'une poutre linéaire sans support, la non-linéarité étant due aux conditions limites qui correspondent alors à un ressort non-linéaire. Le

déplacement aux limites est toujours nul, mais quand les déplacements deviennent plus importants, un moment apparaît au niveau du pivot.

[Hsieh 1994] applique la même démarche pour l'établissement de la dynamique d'une poutre en grands déplacements.

### ***b. Modèle d'un accéléromètre [Westby 2002].***

[Westby 2002] propose une étude paramétrique d'un accéléromètre à deux axes dans le cas conservatif. Il se base sur le système d'EDO non-linéaires régissant la dynamique des coordonnées modales. Il part donc d'un modèle déjà réduit par la méthode de Galerkin. Les non-linéarités sont quadratiques et cubiques. Il fixe les deux premiers modes propres linéaires comme étant les deux modes maîtres. Les autres coordonnées modales seront exprimées sous la forme d'un développement asymptotique à l'ordre trois des coordonnées modales maîtres. Il étudie l'influence de la longueur d'une des poutres de la structure. Pour cela il établit un développement limité au premier ordre du premier mode propre linéaire du système. Il fait de même pour les coefficients du développement asymptotique des modes « esclave ». On remarque que les résultats présentés servent à valider l'approximation paramétrique et non la validité du modèle réduit. Il compare les résultats des modèles réduits établis avec différentes valeurs de la longueur et ceux du modèle fonction du paramètre longueur. Il présente une comparaison des valeurs propres des modes ainsi qu'un coefficient de la matrice de raideur des termes quadratiques en fonction de la longueur, ainsi que l'amplitude dans le temps du premier mode pour une amplitude du deuxième mode non-nulle. Ces résultats, comparés à un modèle établi pour chaque valeur de la longueur sont valables pour une variation de  $L$  de 20%.

## **1.4.3.2. Méthode de Galerkin**

### ***a. Méthode***

Les équations de départ sont ici un système d'équations différentielles ordinaires issu de la méthode de Galerkin appliquée à un système d'EDPs, ou du modèle d'un système de masses discrètes, ou d'un modèle éléments finis.

[Pesheck 2002] résout les EDPs définissant les variétés invariantes par une méthode de Galerkin ce qui permet d'étendre le domaine de validité du modèle par rapport à la méthode



asymptotique décrite précédemment. En effet l'expression des relations définissant les variétés comme un développement asymptotique limite leur validité aux faibles non-linéarités. Il ne prend en compte qu'une variable maître et remplace les variables (*déplacement, vitesse*) par les variables (*amplitude  $a$ , phase  $\Phi$* ), ce qui facilite la définition du domaine de validité ainsi que le choix des fonctions de bases mais limite l'étude à celle de systèmes oscillants. Les fonctions de bases seront par exemple harmoniques en  $\Phi$ . Les fonctions positions  $P_i$  et vitesses  $Q_i$  de la  $i^{\text{ème}}$  variable esclave sont développées sur des fonctions de bases  $T_{l,m}$  et  $V_{l,m}$  (1-47) :

$$\begin{aligned} P_i(a, \phi) &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} C_i^{l,m} T_{l,m}(a, \phi) \\ Q_i(a, \phi) &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} D_i^{l,m} V_{l,m}(a, \phi) \end{aligned} \quad i = 2, \dots, N \quad (1-47)$$

La projection des EDPs définissant les variétés sur les fonctions de bases donne un système de  $2(N-1)N_a N_\phi$  équations non-linéaires à résoudre,  $N$  étant le nombre de variables « position » du système initial. Une variante consiste à considérer le modèle linéaire par morceau en  $a$  et donc à résoudre des problèmes plus simples sur des intervalles  $[a_i, a_j]$ . Le coût calculatoire de cette méthode est bien plus important que la méthode asymptotique mais elle présente l'avantage de pouvoir représenter plus de non-linéarités dans la limite des approximations faites sur l'expression des celle-ci. On remarque que les paramètres n'apparaissant pas explicitement dans l'expression des variétés, cette méthode se prête moins à une étude paramétrique du système que le développement asymptotique décrit plus haut.

### ***b. Exemples étudiés***

[Pesheck 2002] étudie dans un premier temps un système discret conservatif à deux degrés de libertés et à non-linéarités cubiques. Il compare ses résultats sur la variété du premier MNN et du deuxième MNN à des variétés déterminées par une méthode asymptotique à l'ordre 3 et montre que cette dernière ne suffit plus, bien que les non-linéarités soient aussi d'un ordre 3. Il étudie aussi la réponse fréquentielle de ces différents MNNs. Dans un deuxième temps il étudie une poutre à 200 éléments finis à deux nœuds chacun soit un modèle à 400 degrés de liberté. Les conditions limites sont un ressort linéaire et un pivot associé à un ressort torsionnel non-linéaire. Il retient parmi les 400 modes linéaires, les 10 premiers. Il étudie les MNNs 2 et 5, à savoir les variétés, les réponses fréquentielles et la forme du mode.

### 1.4.3.3. Formes normales

#### a. Méthode

Les équations de départ sont un système d'EDO non-amorties à non-linéarités quadratiques et cubiques obtenu par projection de l'équation aux dérivées partielles sur les modes propres linéaires (1-48).

$$\ddot{P}_n + \omega_n^2 P_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{i,j}^n P_i P_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{i,j,k}^n P_i P_j P_k = 0 \quad n = 1, \dots, +\infty \quad (1-48)$$

où  $P_n$  sont les coordonnées modales.

[Touzé 2004] établit les formes normales du système à  $N$  degrés de liberté par un changement de variable qui annule les termes non-résonants (termes brisant l'invariance) des équations. Les anciennes coordonnées sont exprimées comme un développement asymptotique à l'ordre 3 des nouvelles coordonnées (1-49). Les  $Q_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sont les coordonnées modales vitesses associées aux  $P_n$ .  $(R_n, S_n)$  sont les coordonnées position et vitesse issues du changement de variable.

$$P_n = R_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} (a_{i,j}^n R_i R_j + b_{i,j}^n S_i S_j) + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} r_{i,j,k}^n R_i R_j R_k + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} u_{i,j,k}^n R_i S_j S_k = 0$$

(1-49a)

$$Q_n = S_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \gamma_{i,j}^n R_i S_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} \mu_{i,j,k}^n S_i S_j S_k + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} \nu_{i,j,k}^n S_i R_j R_k = 0 \quad (1-49b)$$

Il obtient  $N$  modes normaux non-linéaires. Il établit un modèle à partir du seul premier mode  $(R_1, S_1)$ , les autres étant supposés nuls. On remarque que par le changement de variable non-linéaire plusieurs modes linéaires sont en fait pris en compte dans la dynamique du système correspondant au premier mode normal non-linéaire (MNN). La troncature a été faite sur les formes normales et non directement sur les modes linéaires. Si on compare à une méthode où les variétés sont établies par développement asymptotique des coordonnées modales maîtres [Pesheck 1997], ici la variable maître n'est pas tout à fait la même. Dans le cas de [Pesheck 1997], ce sont les coordonnées du premier mode linéaire, ici ce sont les coordonnées de la première forme normale. Les coordonnées de tous les modes linéaires sont fonctions des coordonnées de la forme normale sélectionnée.

[Touzé 2006] étend les résultats de [Touzé 2004] à un système dissipatif et excité par une force extérieure. Il a été prouvé rigoureusement que certaines équations différentielles

partielles de systèmes dissipatifs avaient des variétés inertielles de dimensions finies, c'est-à-dire que la dynamique du système à long terme est décrite exactement par un système d'équations différentielles ordinaires de dimension finie [Rega 2005]. Toutefois ces variétés peuvent être de dimensions importantes, ainsi cette théorie est très rarement appliquée directement. D'un point de vue applicatif, faisant l'hypothèse qu'elle existe, on cherche en général directement une variété inertielle approchée. On peut aussi traiter la force de dissipation comme une force extérieure au système et l'ajouter a posteriori au modèle basé sur le MNN. Ici [Touzé 2006] prend en compte la dissipation dans la construction du MNN. De même pour une force d'excitation extérieure au système, on devrait rigoureusement la prendre en compte dans la construction du MNN comme une variable « maître » supplémentaire. Il considère ici que la force extérieure ne perturbe qu'à l'ordre 2 les MNNs établis et l'ajoute a posteriori au modèle non-linéaire construit.

### ***b. Exemples étudiés***

[Touzé 2004] étudie le comportement fréquentiel d'un système discret conservatif à deux degrés de libertés aux alentours de la fréquence fondamentale, plus précisément le comportement « raidissant » ou « assouplissant » du système. Il constate qu'une méthode de Galerkin classique ne prenant en compte qu'un mode linéaire ne prédit pas correctement cet aspect qualitatif alors que le MNN donne les résultats corrects. Dans un deuxième temps, il étudie un système continu, une poutre d'Euler-Bernoulli linéaire auquel on ajoute un support non-linéaire dont les non-linéarités sont quadratiques et cubiques. Les conditions limites correspondent à un pivot parfait. Des solutions à ce système ont été trouvées par la méthode des échelles multiples, solution à laquelle il compare ses résultats. Il retient 10 modes propres linéaires et obtient par projection un système d'EDO à partir duquel il construit les formes normales et donc les modes propres non-linéaires. Il étudie pour les trois premiers modes non-linéaires la réponse fréquentielle et le changement dans la forme des modes.

[Touzé 2006] étudie ensuite le système à deux degrés de liberté précédent en y ajoutant de la dissipation qu'il prend en compte dans la construction du MNN. Il constate que l'ajout d'amortissement peut changer le comportement raidissant ou assouplissant du système. Il étudie ensuite la réponse fréquentielle à une excitation sinusoïdale extérieure pour des fréquences proches de la première fréquence de résonance du système. En comparant ses résultats à ceux issus du MNN construit dans le cas conservatif, il constate que ce dernier donne en général de bons résultats qualitatifs mais des résultats quantitatifs faux. Les MNNs prenant en compte l'amortissement donnent de meilleurs résultats quantitatifs dans la limite

d'une certaine amplitude d'excitation, le modèle restant basé sur un développement asymptotique d'ordre 3. Il étudie ensuite un système continu, à savoir une coque remplie d'eau. Il retient 16 modes linéaires comme base du modèle et construit ensuite un MNN basé sur deux modes car il y a un phénomène de résonance interne. De même il étudie la réponse fréquentielle des différentes coordonnées modales à une excitation extérieure et obtient des bons résultats quantitatifs.

#### **1.4.3.4. Utilisation de la périodicité du mouvement**

Dans le cas conservatif le mouvement est périodique. On peut se servir de cette propriété pour établir les variétés [Slater 1996]. En effet si les conditions initiales du mouvement ne sont pas sur la variété, le mouvement sera indéfiniment apériodique voire indéfiniment chaotique si les amplitudes initiales sont suffisantes. Il s'agit de déterminer la variété ainsi que la période de l'oscillation associée à l'amplitude. Pour cela, il effectue une simulation dans le temps croissant et dans le temps décroissant sur une période supposée et cherche à minimiser l'erreur entre les deux trajectoires. Il commence autour de l'équilibre à de faibles amplitudes considérant le système linéaire. Il augmente au fur et à mesure l'amplitude des conditions initiales. Cette méthode est particulièrement coûteuse.

#### **1.4.3.5. Prise en compte de la force extérieure dans l'établissement du MNN.**

##### ***a. Méthodes***

Rigoureusement quel que soit le type de force extérieure, elle devrait être prise en compte dans la construction du MNN. Les variétés dépendent alors par son intermédiaire du temps. Pour une excitation harmonique, les MNNs peuvent être établis pour chaque fréquence. [Jiang 2005] étudie la réponse forcée de systèmes autour de leur première fréquence de résonance. Les variétés sont déterminées par la méthode de Galerkin. Les variables maîtres sont l'amplitude et la phase du mode maître choisi auxquelles est ajoutée la phase de la force extérieure, ceci pour une fréquence d'étude donnée. Cela revient à établir des variétés qui dépendent du temps via la phase de la force.

##### ***b. Exemples étudiés***

[Jiang 2005] s'intéresse dans un premier temps à un système discret à deux degrés de libertés, et étudie les réponses fréquentielles autour de leur fréquence de résonance des premier et deuxième MNNs. Dans un deuxième temps, il étudie une poutre d'Euler-Bernoulli aux conditions limites non-linéaires. Il retient 12 modes linéaires et étudie la réponse fréquentielle et transitoire du système pour une excitation proche de la première fréquence de résonance à partir du premier MNN. Les résultats sont concordants.

#### 1.4.3.6. Système soumis à l'amortissement d'un film d'air comprimé

[Westby 2003]

[Westby 2003] établit le modèle d'un système dissipatif soumis à l'amortissement d'un film d'air comprimé. Il utilise un modèle éléments finis pour la partie mécanique et un modèle simplifié pour l'équation de Reynolds qui sera étudiée plus en détail dans le chapitre 2. Il néglige la compressibilité de l'air et la linéarise partiellement :

$$\Delta p = \frac{12\mu}{G^3} \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (1-50)$$

Où  $p$  est la pression,  $G$  l'écart entre la structure mobile et la structure fixe,  $\mu$  la viscosité de l'air ambiant. Le terme non-linéaire est inversement proportionnel au cube de l'écart entre les surfaces. On ne peut inclure la force dissipative à la dynamique du système construite à partir de variétés du cas conservatifs a posteriori car la force dissipative, ou toute force extérieure influe directement sur la variété. Il utilise une méthode qui s'inspire de la méthode de Galerkin décrite par [Peschek 2002]. Il considère un mode dominant dont les variables seront l'amplitude  $A$  et la phase  $\Phi$  et cherche à établir la dynamique du système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\phi}(A, \phi) \\ f_A(A, \phi) \end{bmatrix} \quad (1-51a)$$

$$\begin{aligned} f_{\phi}(A, \phi) &= \sum_n a_n A \cos(b_n \phi + \tau_n) \\ f_A(A, \phi) &= \sum_n c_n A^2 \cos(d_n \phi + \eta_n) \end{aligned} \quad (1-51b)$$

La détermination de la variété pose le problème des conditions initiales. En effet, on ne peut les choisir quelconques car elles doivent être sur la variété qu'on cherche à établir. Ainsi

[Westby 2004] part de l'équilibre du système et réalise une simulation inverse dans le temps (on change  $t$  en  $-t$ ) du système libre pour établir la variété à des amplitudes plus importantes. Les paramètres  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  sont à déterminer par minimisation de l'erreur par rapport aux données issues de simulations inverses du système couplé. La validité des surfaces invariantes  $f_\phi(A, \phi)$  et  $f_A(A, \phi)$  est établie par simulations classiques (temps croissant). La trajectoire des états doit être sur la surface invariante ou doit rejoindre la surface invariante si les conditions initiales ne l'étaient pas.

Cette méthode diffère de celle décrite par [Peschek 2002] dans le sens où elle n'est pas basée sur le système d'EDPs régissant la dynamique du système. Ces EDPs servent tout au plus à inspirer la structure supposée du modèle en (1-51). Il n'est pas nécessaire de résoudre le système d'EDPs régissant les relations entre le mode « maître » et les modes « esclave » pour établir la dynamique du système (1-51). Toutefois on peut établir des fonctions approchées de ces relations à partir des informations issues des simulations inverses du système couplé (interpolation linéaire par exemple). Ces fonctions seront nécessaires pour reconstruire le mouvement physique de la structure. On peut considérer cette approche comme étant purement numérique. Elle se base seulement sur l'existence a priori des relations invariantes entre modes « maîtres » et modes « esclaves ».

E. R. Westby présente des résultats concernant le même accéléromètre celui du §1.4.3.2\b. Il établit les variétés invariantes en retenant successivement comme mode « maître » un mode sous-amorti et un mode sur-amorti. Dans le cas d'un mode sur-amorti, il existe une relation bijective entre la vitesse et l'amplitude du mode. La surface invariante se résume alors à une ligne. Les résultats du modèle réduit sont comparés au modèle complet non-linéaire et présentent quelques erreurs dues entre autre aux formes des équations d'approximations choisies pour établir la dynamique.

#### **1.4.4. Conclusion**

La démarche associée aux modes propres non-linéaires consiste à trouver des relations invariantes entre des variables maîtres et des variables esclaves. Ces variables peuvent aussi bien être associées à un élément physique de la structure qu'à la coordonnée modale associée à un mode linéaire. Dans le cas où les variables d'état sont les coordonnées modales, on part en fait d'un modèle déjà réduit par la méthode de Galerkin et on cherche en général à ramener la dynamique à un seul mode. Deux méthodes ont été explicitées ici. L'une consiste à

considérer des modes maîtres des modes esclaves et à chercher à exprimer les modes esclaves comme une fonction des modes maîtres à partir des EDPs les régissant. L'autre consiste à déterminer les formes normales, ce qui correspond à un changement de variable non linéaire permettant d'annuler les termes brisant l'invariance de l'équation originale. Une fois ces formes déterminées, une troncature est faite sur ces modes. Les coordonnées des différents modes linéaires peuvent être exprimées comme des fonctions non-linéaires des formes normales retenues. Contrairement à la troncature à un ou plusieurs modes de la méthode de Galerkin simple, l'influence des modes linéaires non retenus n'est pas considérée nulle mais est prise en compte par l'intermédiaire des variétés invariantes. Le principe de superposition n'étant pas valable on ne peut associer différents MNNs, il faut reconstruire un MNN multimodal à partir des coordonnées des modes retenus considérées comme des variables maîtres. Ainsi l'objectif est de réduire le coût d'évaluation du modèle en ramenant la dynamique à deux ou quatre variables d'état. Ceci se fait au prix de construction du modèle qu'implique la détermination du changement de variable ou l'établissement des variétés invariantes. Deux méthodes principales existent pour l'établissement de celle-ci à partir des EDPs les régissant : la méthode asymptotique, et la méthode de Galerkin. La méthode de développement asymptotique a un domaine de validité limité mais présente l'avantage d'avoir une formulation explicite qui facilite une étude paramétrique du système. La méthode de Galerkin étend le domaine de validité au prix d'un coût calculatoire important et de la disparition d'une formulation explicite des coefficients déterminant la variété. Enfin, rigoureusement, les forces dissipatives et extérieures devraient être prise en compte dans la construction des MNNs. C'est encore possible à un coût raisonnable pour une force dissipative simple (amortissement linéaire) mais a un coût calculatoire prohibitif pour une force extérieure. Une approximation possible consiste à les ajouter a posteriori à un modèle basé sur un MNN construit à partir du système conservatif libre.

## 1.5. Couplage

La modélisation d'un microsystème fait intervenir la résolution d'un système couplé. On suppose  $m$  domaines physiques différents.

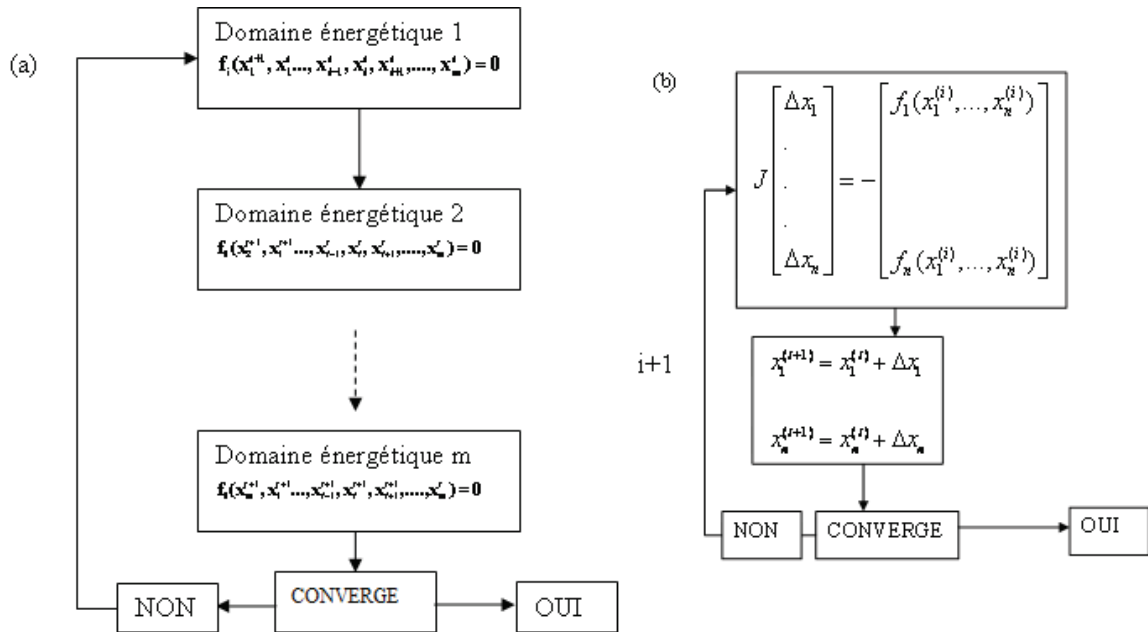
A chaque domaine physique est en général associé une méthode numérique particulière, les plus couramment utilisées étant les éléments finis et les éléments frontières. Les éléments finis sont en général utilisés pour la partie mécanique alors qu'on préférera les éléments frontières pour la résolution du problème électrostatique car cette méthode permet de réduire le problème d'une dimension au prix toutefois de matrices pleines.

Une première méthode de résolution est la méthode de relaxation (cf Figure 1-2) qui consiste à résoudre chaque domaine un à un itérativement jusqu'à convergence de la solution. Celle-ci ne présente pas de bonnes propriétés de convergence. On résout pour chaque domaine physique une équation linéaire ou non-linéaire du type :

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i^{t+1}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i^t, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, m \quad (1-53)$$

Les variables  $\mathbf{x}_j$ ,  $j \neq i$  sont prises à l'instant  $t$  ou  $t+1$  selon que la résolution du domaine  $j$  a été faite avant ou après celle du domaine  $i$ .

Une deuxième méthode consiste à résoudre le système dans son ensemble ce qui assure une meilleure convergence. Toutefois, cela nécessite, pour une résolution par la méthode de Newton, de calculer le Jacobien complet du système.



**Figure 1-2** Résolution d'un problème couplé.  
(a) Méthode de relaxation (b) Méthode de Newton appliquée au système complet



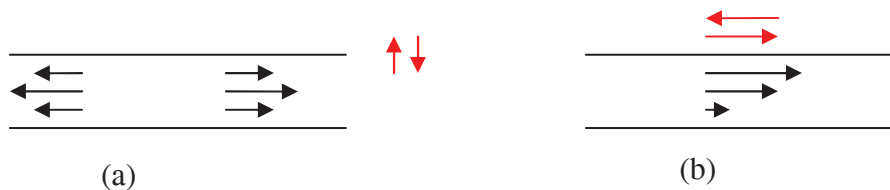
## **1.6. Conclusion**

Dans le cas de systèmes linéaires, les méthodes de choix des bases de projection ont un cadre théorique bien établi (espace de Krylov, troncature balancée,...). Ces méthodes peuvent être utilisées dans le cadre d'un système non-linéaire. Il est toutefois intéressant de considérer le caractère non-linéaire dans la construction de cette base. Certaines méthodes nécessitent alors une forme d'apprentissage, la base réduite est établie à partir de certaines simulations choisies pertinemment (Décomposition propre orthogonale, troncature balancée [Lall 2002],...). La validité des modèles établis dépend de cet apprentissage. La décomposition propre orthogonale optimise l'énergie du système projeté alors que la troncature balancée est reliée plus directement aux résultats sur la dynamique du système à savoir la fonction de transfert. Cette dernière donne alors de meilleurs résultats au prix d'une construction coûteuse de la base due au calcul des grammien. La méthode qui fait intervenir les modes propres non-linéaires ne va pas dépendre d'un apprentissage. Dans certains cas, cette démarche consiste, à partir d'un modèle réduit par projection sur une base, à le ramener à un seul mode dominant, les autres coordonnées modales étant des fonctions des variables d'états associées à ce mode. Le coût d'évaluation du modèle est réduit au prix de la construction. Selon la méthode choisie, le coût de construction des variétés est plus ou moins important.

Dans les chapitres suivants, on va traiter un problème couplé fluide-structure non-linéaire. Le chapitre 2 traitera du problème fluide seul à travers la résolution de l'équation de Reynolds non-linéaire. On cherchera parmi les modes propres, une base issue de la décomposition propre orthogonale et une base de Krylov, laquelle est la plus pertinente. Dans le chapitre 3 où l'on traite d'un problème couplé mécanique-electrostatique-fluide, pour la partie structure, on retient les modes propres linéaires vecteurs propres du couple de matrices raideur et masse. Dans le chapitre 4, on réduira le coût d'évaluation des termes non-linéaires, dans un premier temps par l'établissement d'une fonction d'approximation de projection de la force de pression, fonction des coordonnées modales, puis dans un deuxième temps par une approche de linéarisation par morceaux.

## Chapitre 2      Résolution de l'équation de Reynolds

Les forces volumiques telles que la force de gravité ou l'inertie sont des fonctions de la dimension du système au cube alors que les forces de surface telle que l'action de l'air sur une structure sont des fonctions de la dimension au carré [Bao 2007]. Ainsi plus les dimensions d'une structure sont petites, plus les forces surfaciques vont avoir une importance sur la dynamique du système, notamment les interactions fluide-structure. On considère deux plaques en mouvement l'une par rapport à l'autre, un fluide remplissant l'espace entre elles. L'actionnement électrostatique et la détection capacitive (cf figure 2-1) sont très courants dans les microsystèmes et donnent souvent lieu à cette configuration du problème.



**Figure 2-1** (a) Fluide modélisé par l'équation de Reynolds (b) Fluide modélisé par un écoulement de Couette.  
Le profil de vitesse apparaît en noir alors que le mouvement de la plaque est décrit par les flèches rouges.

Lorsque les dimensions de plaques sont grandes devant la distance qui les sépare et que les deux plaques sont en mouvement parallèle l'une par rapport à l'autre, le fluide est modélisé par un écoulement de Couette (figure 2-1b). Lorsqu'elles sont en mouvement perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, le fluide est modélisé par l'équation de Reynolds correspondant au phénomène d'amortissement d'un film d'air comprimé (figure 2-1a). Dans la littérature, on trouve le terme de « squeeze film damping » [Bao 2007]. On s'intéressera plus particulièrement à ce phénomène dans le but de modéliser l'actionnement d'un micro-interrupteur. On présentera la dérivation de l'équation de Reynolds avec les hypothèses associées puis on exposera différents exemples de résolutions de l'équation de Reynolds linéaire puis non-linéaire venant de la littérature. On proposera ensuite notre propre résolution de l'équation linéaire et une étude de la réponse fréquentielle en pression sera faite. Une troisième partie traitera de la résolution l'équation de Reynolds non-linéaire basée sur un changement de variable par la méthode de Galerkin. Enfin, nous étudierons sur cet exemple l'influence du choix des fonctions de base pour l'utilisation de la méthode de Galerkin.

## 2.1. Etablissement et résolution de l'équation de Reynolds

### 2.1.1. Etablissement de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds modélise le comportement d'un film d'air compris entre deux plaques bougeant perpendiculairement l'une par rapport à l'autre. Quand le mouvement est lent, on peut considérer le film d'air se comporte comme un amortissement visqueux non-linéaire. Quand il est rapide, l'air n'a plus le temps de s'échapper et se trouve comprimé (ou quand le volume entre les deux plaques augmente, la dépression n'est pas compensée par une arrivée d'air). Ceci correspond à un phénomène de compression élastique qui peut prendre des amplitudes importantes d'où le terme de « squeeze film damping ».

On considère une plaque flexible en mouvement face à un plan fixe de même dimension. Le domaine de la plaque est défini par les variables  $(x, y) \in [0, L] \times [0, W]$  où  $L$  est la longueur de la plaque et  $W$  sa largeur.  $G(x, y, t)$  est l'écart au plan fixe.

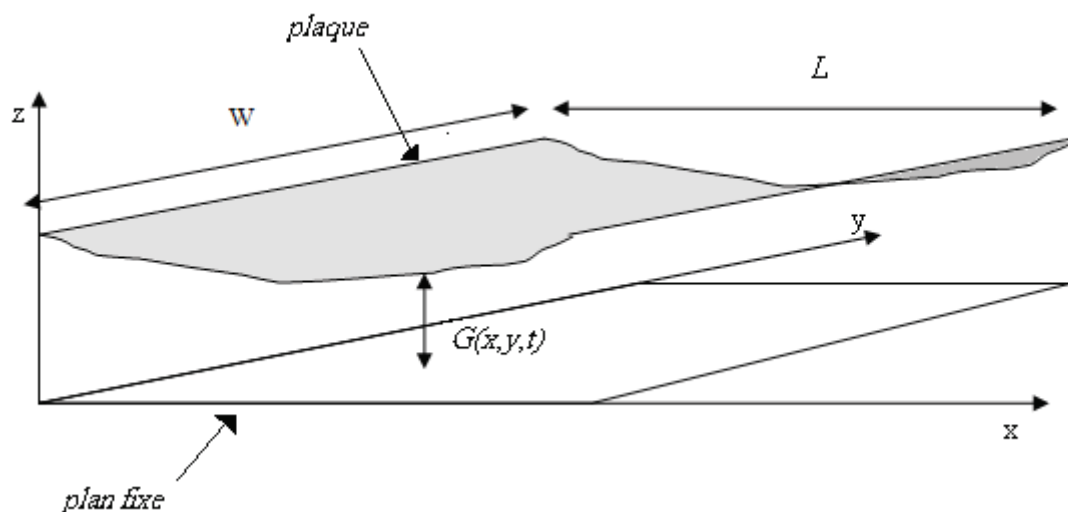


Figure 2-2 Plaque en mouvement par rapport à une plaque fixe.

La validité de l'équation de Reynolds suppose un certain nombre d'hypothèses qui sont les suivantes :

- les dimensions latérales de la plaque en mouvement sont grandes devant la distance entre les deux plaques.
- le mouvement est lent. On néglige donc les termes inertiels devant les termes visqueux. Le fluide est alors dans le régime de Stokes.
- la pression  $P=P(x,y)$  est homogène sur la hauteur du film d'air.

- le profil de l'écoulement est parabolique sur la hauteur, défini par une équation du type Poiseuille.
- on fait l'hypothèse du gaz parfait.
- le système est isotherme ce qui suppose que la plaque a une conductivité thermique importante [Darling 1998]. Dans le cas contraire, l'hypothèse d'une transformation adiabatique est plus pertinente.
- La relation des gaz parfait sur  $\rho$  et  $P$  nous dit qu'ils sont proportionnels :

$$P = \rho \frac{RT}{M} \quad (2-1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du gaz,  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $T$  la température, et  $M$  la masse molaire du gaz.

On suppose les supports d'encastrement de la plaque en haut de telle manière à ce que les bords soient ouverts. La variation de pression  $p$  y est alors supposée nulle :

$$p = P - P_0 = 0 \quad (2-2)$$

où  $P_0$  est la pression ambiante.

L'écoulement est de type Poiseuille, c'est-à-dire que le profil de vitesse est du type :

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z - G) \\ v_y(x, y, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} z(z - G) \end{aligned} \quad (2-3)$$

Où  $v_x$  et  $v_y$  sont les vitesses selon les directions  $Ox$  et  $Oy$ , et  $\mu$  est la viscosité.

On a, pour arriver à ce résultat, négligé les termes inertiels et les variations de  $v_x$  par rapport à  $y$  et de  $v_y$  par rapport à  $x$  par rapport à leurs variations respectives selon  $z$  dans l'équation de Navier-Stokes.

Pour parvenir à l'équation de Reynolds, on intègre l'équation de conservation de la masse sur la hauteur du film de fluide.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2-4)$$

$$\int_0^{G(x,y)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dz = G \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{G(x,y)} \rho v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{G(x,y)} \rho v_y dz \quad (2-5)$$

D'après (2-3) on a :

$$\int_0^{G(x,y)} v_x dz = \frac{-1}{12\mu} G^3 \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2-6)$$

Il en est de même pour l'intégrale sur  $v_y$ .

On obtient :

$$\nabla \cdot \left( \frac{G^3}{12\mu} \rho \nabla P \right) = \frac{\partial G \rho}{\partial t}, \quad (2-7)$$

qui est l'équation de Reynolds

En appliquant la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$\nabla \cdot \left( \frac{G^3}{12\mu} P \nabla P \right) = \frac{\partial G P}{\partial t} \quad (2-8)$$

Dans le cas où la distance entre les plaques est très petite et/ou la pression est très basse, il y a un effet de raréfaction du gaz, ce qui implique que le régime visqueux devient moléculaire. L'hypothèse de la vitesse latérale nulle du fluide au niveau de la paroi faite pour déterminer le profil de vitesse  $v_x$  et  $v_y$  n'est plus valable, le fluide glisse sur la paroi. On modélise ce phénomène par une viscosité effective fonction du nombre de Knudsen

$$K_n = \frac{\lambda}{G},$$

où  $\lambda$  est le libre parcours moyen du gaz. Un des modèles de la viscosité effective  $\mu_{eff}$  utilisé [Hung 1999] est le suivant :

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + 6K_n}$$

La viscosité effective du régime moléculaire est inférieure à la viscosité définie en régime visqueux. [Veijola 1995] font une étude de l'équation de Reynolds linéarisée sur un accéléromètre considéré non flexible. Ils tirent la conclusion que le modèle le plus approprié concernant la viscosité effective est celui décrit dans [Fukui 1988], bien qu'il présente des erreurs sur la valeur de la viscosité effective allant jusqu'à 30 % comparé à des mesures expérimentales. Ils font remarquer que ces erreurs importantes sont, entre autres, dues aux approximations faites sur la composition du gaz et les propriétés microscopiques caractérisant la manière dont les molécules sont réfléchies à la surface.

### 2.1.2. Equation de Reynolds linéarisée

On décrit ici différentes méthodes de résolution de l'équation de Reynolds linéaire, plus précisément la détermination des composantes de la force de pression qui s'exerce sur la structure. Dans un premier temps, on présente en détail une méthode de résolution analytique [Darling 1998] puis les méthodes de résolutions numériques [Yang 1997] [Mehner 2003]. Enfin on présente un modèle équivalent circuit [Veijola 1995].

#### 2.1.2.1. Résolution analytique

La résolution de l'équation de Reynolds linéarisée apporte un éclairage qualitatif sur la dynamique du phénomène d'amortissement d'un film d'air compressé et le rôle qu'il peut avoir dans un système couplé.

L'équation de Reynolds linéarisée, c'est-à-dire avec l'hypothèse des petits déplacements  $|G_0 - G| \ll G_0$  et des petites variations de pression,  $|p| \ll P_0$ , a la forme d'une équation de diffusion avec terme source :

$$\Delta p - \frac{12\mu}{P_0 G_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{12\mu}{G_0^3} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (2-9)$$

Pour des géométries et des conditions aux limites simples, elle peut être résolue analytiquement [Darling 1998]. [Darling 1998] propose une résolution de l'équation linéarisée dans le cas d'un régime stationnaire sinusoïdal en utilisant la fonction de Green associée. La fonction de Green  $Gr(x, y, t, x_0, y_0, t_0)$  est la réponse du système à un terme source ponctuel :

$$\Delta Gr - \frac{12\mu}{P_0 G_0^2} \frac{\partial Gr}{\partial t} = -4\pi\delta(x - x_0, y - y_0)\delta(t - t_0). \quad (2-10)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac.

La réponse à un terme source quelconque (2-11) s'exprime alors comme l'intégrale du produit de la fonction de Green et du terme source (2-12) :

$$\Delta p - \frac{12\mu}{P_0 G_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -4\pi q(x, y, t) = \frac{12\mu}{G_0^3} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (2-11)$$

$$p(x, y, t) = \int_0^t \int_{s0} Gr(x, y, t, x_0, y_0, t_0) q(x_0, y_0, t_0) dt_0 dx_0 dy_0 \quad (2-12)$$

La fonction de Green peut être exprimée comme un développement série des modes propres du Laplacien et de fonctions du temps.

$$Gr(x, y, t, x_0, y_0, t_0) = \frac{4\pi}{\frac{12\mu}{P_0 G_0^2}} \Theta(t - t_0) \sum_{mn} \exp\left(\frac{-k_{mn}^2 (t - t_0)}{\frac{12\mu}{P_0 G_0^2}}\right) u_{mn}(x, y) u_{mn}^*(x_0, y_0) \quad (2-13)$$

$u_{mn}$  sont les modes propres du Laplacien et vérifient :

$$\Delta u_{mn} + k_{mn}^2 u_{mn} = 0 \quad (2-14)$$

Des conditions limites doivent être associées à cette équation.

$u_{mn}^*$  est le complexe conjugué de  $u_{mn}$  et  $\Theta$  est la fonction de Heaviside.

[Darling1998] établit la réponse fréquentielle du système. En utilisant les notations complexes le terme source (2-11) peut donc s'écrire simplement à partir de l'expression du déplacement :

$$\frac{12\eta_{eff}}{G_0^3} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{12\eta_{eff}}{G_0^3} j\omega \tilde{G}(x, y) e^{j\omega t} \quad (2-15)$$

où  $\tilde{G}(x, y)$  est l'amplitude complexe de la variation de l'écart au substrat.

[Darling 1998] peut alors intégrer le produit de la fonction de Green (2-13) et du terme source (2-15) pour obtenir la réponse en pression  $p(x, y, t)$ . Enfin il intègre sur la surface de la plaque étudiée pour obtenir l'expression de la force résultante. Les parties réelles et imaginaires donnent la composante de raideur et d'amortissement visqueux de l'amortissement du au film d'air. Pour une plaque rectangulaire en mouvement uniforme, avec comme conditions aux limites  $p = 0$ , ces composantes peuvent s'exprimer de la manière suivante:

$$\frac{F_{raideur}(\sigma)}{\tilde{G}} = \frac{64\sigma P_0 A}{\pi^6 G_0} \sum_{m,n, \text{impair}} \frac{m^2 + c^2 n^2}{(mn)^2 [(m^2 + c^2 n^2)^2 + \sigma^2 / \pi^4]} \quad (2-16)$$

$$\frac{F_{amortissement}(\sigma)}{\tilde{G}} = \frac{64\sigma^2 P_0 A}{\pi^8 G_0} \sum_{m,n, \text{impair}} \frac{1}{(mn)^2 [(m^2 + c^2 n^2)^2 + \sigma^2 / \pi^4]} \quad (2-17)$$

Où  $\tilde{G}$  est l'amplitude du déplacement,  $A = WL$ ,  $c = W/L$  et  $\sigma$ , appelé nombre de « squeeze », vaut :

$$\sigma = \frac{12\eta_{eff} W^2}{P_a G_0^2} \omega \quad (2-18)$$

où  $\omega$  est la pulsation du mouvement.

Ces expressions des composantes de la force serviront pour établir le modèle équivalent circuit dans le paragraphe suivant.

### **2.1.2.2. Résolution numérique**

Si la géométrie est telle qu'on ne peut déterminer une expression analytique de la force, on peut en déterminer les composantes modales par simulation numérique. On entend par composante modale, la projection de la force fluide sur les modes propres mécaniques quand la structure se déforme selon ces modes propres. [Yang 1997] par une simulation élément finis de l'excitation du premier mode mécanique de sa structure, extrait des coefficients de raideur et d'amortissement pour ce mode d'oscillation. Il compare ses résultats aux mesures de [Gretillat 1994] et trouve des résultats concordant quant aux facteurs de qualité et à la fréquence de résonance pour des pressions ambiantes de  $10^2$  Pa à  $10^3$  Pa. [Mehner 2003] se base sur la même démarche en balayant la plage des fréquences et en incluant la possibilité d'interactions entre modes dans le cas d'une structure asymétrique. En plus des coefficients propres à chaque mode, il met en évidence des coefficients de raideur et d'amortissement d'interaction modale. Ces coefficients correspondent à la projection de la pression due à l'excitation d'un mode sur un autre mode. On utilisera une approche qui s'apparente à celle-ci dans le chapitre 4, à la différence qu'on ne cherche pas à décomposer la force afin de déterminer des coefficients de raideur et d'amortissement mais plutôt à trouver un modèle de la force projetée dans son ensemble.

Les modèles réduits de la partie physique du microsystème sont souvent élaborés dans une perspective d'intégration à un modèle du système complet, électronique associée. Ainsi à partir de ces informations sur les composantes raideurs et amortissement, il est intéressant d'essayer d'établir des équivalents circuits de la partie physique ce que propose [Veijola 1995]. En effet on peut alors implémenter le modèle complet sur un logiciel de simulation électronique.

### **2.1.2.3. Modèle équivalent circuit du « squeeze-film damping »**

Veijola s'attache à établir un modèle d'un accéléromètre considéré comme une plaque rectangulaire rigide (Fig.2-3). La figure 2-3 représente un équivalent circuit de cet

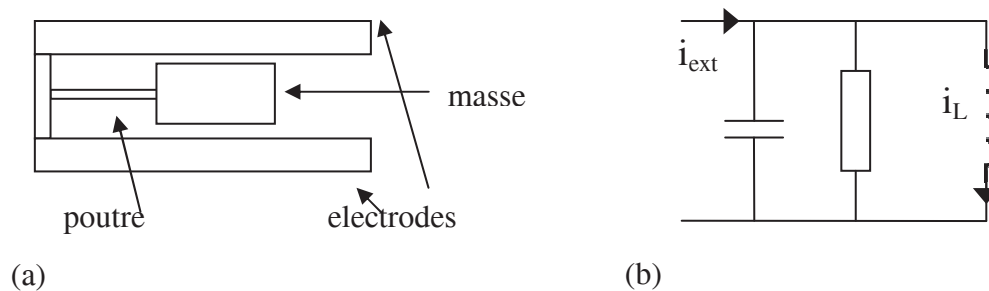


accéléromètre sans prise en compte de l'amortissement. On remarquera qu'on peut faire plusieurs choix concernant l'équivalent mécanique-électrique [Westby 2003]. On choisit ici l'équivalence force-courant. Les équivalences des autres grandeurs mécaniques sont alors données dans le tableau (2-1).

**Tableau 2-1** Equivalence mécanique-électrique

Force $f$	Courant $i$
Vitesse	Tension $V$
Déplacement	Flux $\psi = Li_L$
Amortissement $c$	Inverse d'une résistance $1/R$
Raideur $K$	Inverse d'une inductance $1/L$
Masse	Capacité $C$

Les équations du circuit équivalent sont strictement équivalentes à celle du système mécanique.



**Figure 2-3** (a) Type d'accéléromètre modélisé dans [Veijola 1995]. La flexion de la masse est négligée, le déplacement le long de la masse est considéré uniforme. (b) Son équivalent circuit avec un modèle d'amortissement linéaire.

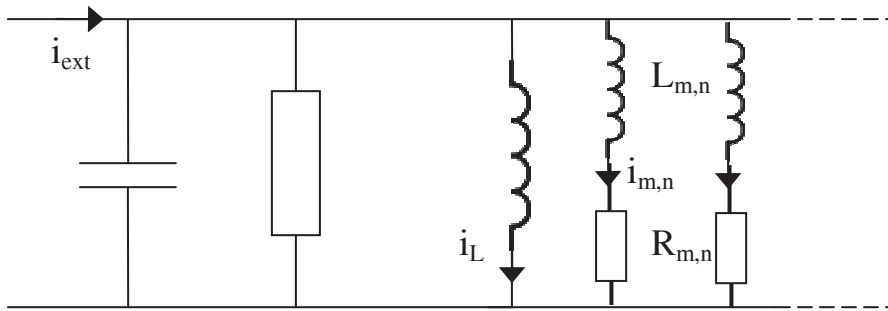
L'amortissement d'un film d'air compressé correspond à une raideur  $K(\omega)$  et à un coefficient d'amortissement linéaire  $c(\omega)$  définis par les équations (2-16) et (2-17). L'équivalent circuit correspond donc à une inductance et une résistance respectivement en parallèle avec l'inductance de la figure 2-3 représentant la raideur mécanique. Les simulateurs ne peuvent fonctionner avec des composants dépendant de la fréquence. [Veijola 1995] propose une implémentation circuit par branchement parallèle d'inductances  $L_{m,n}$  et résistances  $R_{m,n}$  qui rendent compte de la composante de la force  $F_{m,n}$  équivalente et de sa dépendance en la fréquence, l'impédance d'une inductance étant une fonction de la fréquence (Figure 2-4). Les parties réelle et imaginaire du courant  $i_{m,n}$  correspondent alors respectivement aux composantes réelles et imaginaires du développement série (2-16) et (2-17) multiplié par

l'amplitude du déplacement. Les valeurs  $L_{m,n}$  ,  $R_{m,n}$  sont déterminées par simple identification :

$$\frac{\bar{I}_s}{\bar{\psi}} = \sum_{m,n \text{ impairs}} \frac{j\omega}{R_{m,n} + jL_{m,n}\omega} \quad (2-19)$$

où  $\bar{I}_s$  correspond à la résultante de la force de pression et  $\bar{\psi}$  au déplacement. Les 5 premiers éléments de la série suffisent en pratique à une précision correcte.

La valeurs des composants dépendent des paramètres géométriques de la plaque et des paramètres physiques  $P_0$  et  $\mu$ .



**Figure 2-4** Equivalent circuit d'un accéléromètre avec amortissement d'un film d'air compressé.

### 2.1.3. Résolution de l'équation de Reynolds linéarisée autour d'un point de fonctionnement

La valeur de  $L_{m,n}$  et  $R_{m,n}$  des composants décrits au paragraphe précédent [Veijola 1995] sont entre autres des fonctions non-linéaires de l'écart  $G_0$ . L'accéléromètre peut être utilisé autour d'un point de fonctionnement qui ne correspond pas à son équilibre statique. Les simulateurs d'électroniques permettent à partir de la fonction des composants en  $G_0$  de calculer ce point de fonctionnement puis de faire la simulation petits signaux (système linéaire) autour de ce point. Ce modèle considère que la structure est rigide.

Pour établir le modèle d'amortissement d'un film d'air compressé à intégrer au modèle complet [Mehner 2003] réalise une série de simulations de l'équation de Reynolds linéarisée autour d'un point de fonctionnement dans le cas du régime stationnaire sinusoïdal. Par excitation des différents modes mécaniques de la structure, il établit des coefficients d'interaction modale de raideur  $K_{ij}(\omega, \mathbf{x})$  et d'amortissement  $C_{ij}(\omega, \mathbf{x})$  dépendant de la fréquence et de l'amplitude initiale.  $\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées modales correspondant au déplacement statique initial. Pour une déflexion statique donnée, comme Veijola, il

cherche un équivalent sous la forme d'un développement série faisant intervenir des composants linéaires de raideur et d'amortissement  $K_{ij}^{m,n}(\mathbf{x})$  et  $C_{ij}^{m,n}(\mathbf{x})$ . Ces paramètres sont déterminés par la méthode des moindres carrés.

D'autre part, dans de nombreux cas, on est amené à trouver la réponse fréquentielle d'une structure à proximité d'un point de fonctionnement. Pour ce, on est ainsi amené à connaître la réponse fréquentielle de la force de pression et donc à résoudre l'équation de Reynolds linéarisée autour d'un point de fonctionnement, ce, en régime sinusoïdal.

[Li 2007], de même que [Younis 2004], prend en compte la flexibilité de la structure actionnée. C'est-à-dire qu'il tient compte du fait que le déplacement statique n'est pas constant sur la poutre et de ce fait garde les termes faisant intervenir la dérivée spatiale de ce déplacement statique. Ce n'est pas le cas pour l'équation linéarisée (2-9). [Li 2007] contraint le déplacement par rapport au déplacement statique à suivre le premier mode propre de la poutre encastree-encastree. Il applique la méthode de Galerkin à l'équation de Reynolds linéarisée pour déterminer les coordonnées modales de pression fonction de la fréquence.

[Younis 2004] cherche à résoudre un problème aux valeurs propres. Il résout l'équation d'Euler-Bernoulli non-linéaire pour déterminer le déplacement statique réponse à la tension continue appliquée. Il linéarise ensuite l'équation de Reynolds autour de ce point de fonctionnement et se place en régime sinusoïdal. Par une méthode des perturbations [Nayfeh 1981], il établit l'expression de modes propres de pression  $\tilde{p}_n$  en fonction des modes propres mécaniques  $\tilde{u}_n$ .

#### **2.1.4. Résolution de l'équation de Reynolds non-linéaire**

L'implémentation circuit de [Veijola 1995] ne permet de simuler le « squeeze-film damping » qu'avec la restriction des petits déplacements, ce qui en réduit fortement l'utilité.

[Mehner 2003] détermine numériquement des coefficients  $K_{ij}^{m,n}(\mathbf{x})$  et  $C_{ij}^{m,n}(\mathbf{x})$  dépendant des coordonnées modales  $\mathbf{x}$ , pour différentes valeurs de  $\mathbf{x}$ . Il en propose ensuite des approximations sous la forme de fractions rationnelles. Il utilise ensuite ces fonctions pour des simulations transitoires en grand déplacement d'un micro-interrupteur. Il obtient une erreur inférieure à 15% sur le déplacement de la structure par rapport aux données expérimentales.

[Hung 1999] utilise la méthode de Galerkin avec des modes issus de la décomposition propre orthogonale (§1.3.2.1) pour résoudre l'équation de Reynolds (2-7) dans le cas du régime de Knudsen. L'équation de Reynolds projetée a alors la forme de l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{s})\mathbf{s} + \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2-25)$$

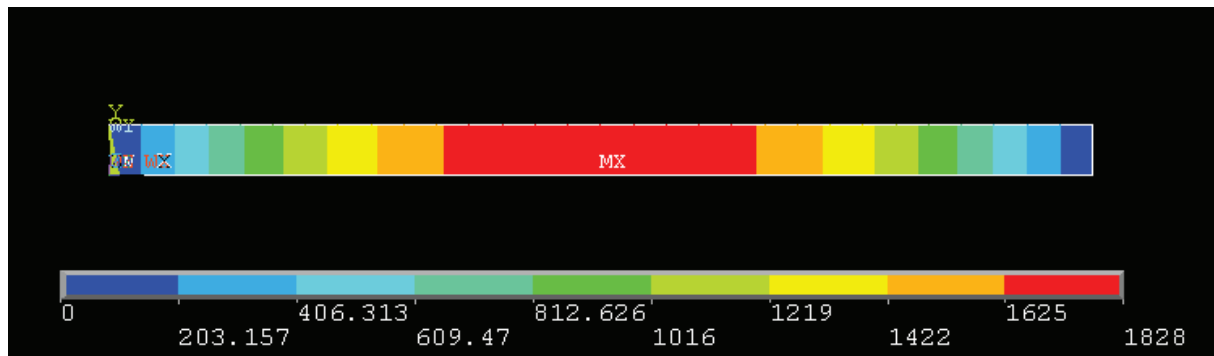
où  $\mathbf{x}$  sont les coordonnées modales mécaniques et  $\mathbf{s}$  celle correspondant à la pression. Il intègre cette équation à un modèle couplé fluide-structure pour déterminer le temps d'effondrement d'une structure. Il obtient des résultats satisfaisants.

## **2.2. Equation de Navier-Stokes/ Equation de Reynolds**

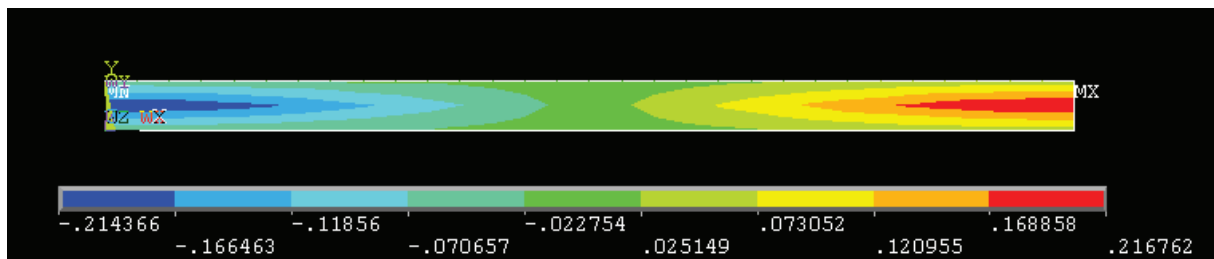
On utilise ici le logiciel de simulation éléments finis ANSYS pour valider les approximations faites sur l'équation de Navier-Stokes pour obtenir l'équation de Reynolds.

### **2.2.1. Modèle Navier Stokes 2D / Modèle Reynolds 1D**

On considère une plaque rigide mobile de largeur considérée infinie en mouvement par rapport à un plan fixe. On considère le film d'air situé entre les deux plans. Le modèle est un modèle éléments finis ANSYS en 2D régi par les équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible. On trouvera le code en annexe A. Une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) est utilisée. C'est-à-dire que le maillage est mis à jour à chaque pas de temps pour suivre le mouvement de la plaque. Ce n'est pas pour autant exactement une description Lagrangienne, le maillage ne suivant pas exactement le mouvement des particules. On soumet une plaque rigide ayant comme dimension  $L=500 \mu\text{m}$  et étant à  $G_0=2 \mu\text{m}$  d'un plan fixe à une excitation sinusoïdale d'amplitude 40% de  $G_0$  et de fréquence 1 kHz, ceci à la pression atmosphérique. Les conditions limites sont celles de bords libres, la variation de pression est nulle. Ci-dessous la variation de pression sur la hauteur du film au temps  $t=0.75 \cdot 10^{-3}\text{s}$ . On vérifie bien que la pression est homogène sur l'épaisseur et ne dépend donc pas de la variable  $z$ .

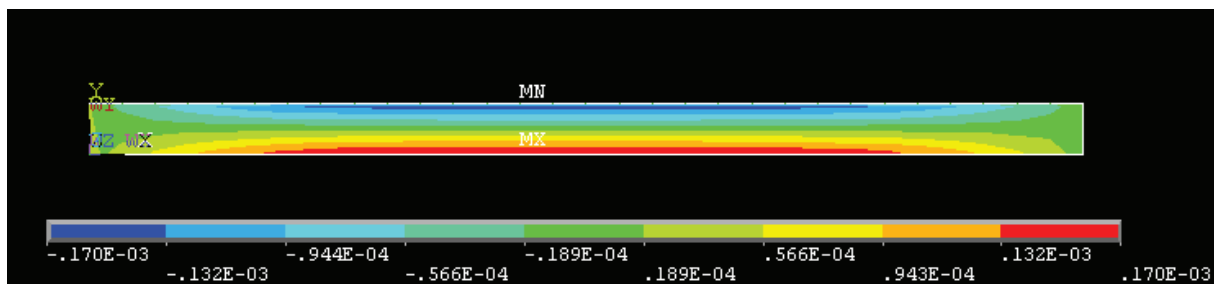


**Figure 2-5** Valeur de la pression sur l'épaisseur et la longueur du film d'air à l'instant  $t=0.75 \cdot 10^{-3}$  s où la plaque est la plus proche du plan fixe.



**Figure 2-6** Valeur de la vitesse  $v_x$  à l'instant  $t=0.75 \cdot 10^{-3}$  s.

On peut vérifier sur la figure 2-6 que l'hypothèse d'un profil de vitesse parabolique ne semble pas fausse bien qu'on ne puisse vérifier ces résultats exactement. On constate aussi que les variations selon la hauteur du film sont en effet beaucoup plus importantes que selon la longueur.



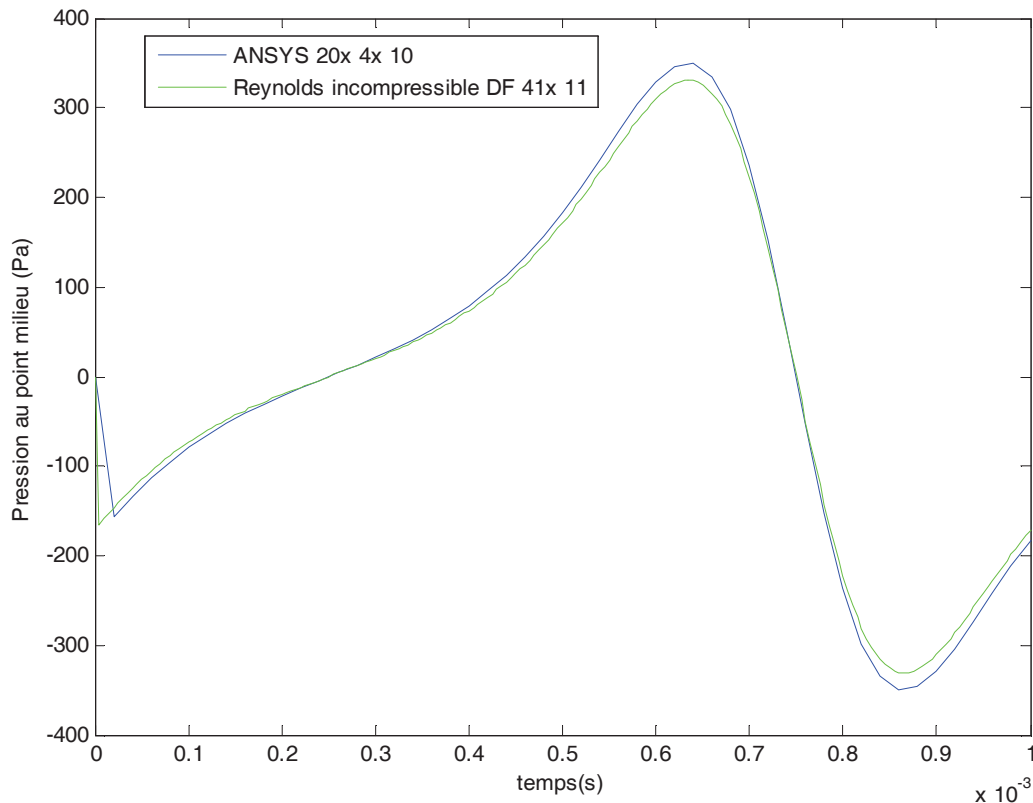
**Figure 2-7** Valeur de la vitesse  $v_z$  à l'instant  $t=0.75 \cdot 10^{-3}$  s.

La figure 2-7 permet de confirmer le fait que la valeur des vitesses  $v_z$  est d'un ordre de grandeur inférieur aux valeurs des vitesses  $v_x$ .

### 2.2.2. Modèle Navier Stokes 3D / Modèle Reynolds 2D

La plaque a ici une largeur de dimension finie  $W=100 \mu\text{m}$ . De même que précédemment on l'excite à une fréquence de 1kHz et à une amplitude de 40% de  $G_0$  mais à une pression ambiante de  $1.013 \times 10^4$  Pa. Afin de valider les hypothèses faites pour la dérivation de l'équation de Reynolds, on compare les résultats pour la variation de pression au point milieu pour un modèle éléments finis de Navier-Stokes en 3D et un modèle de Reynolds en 2D (cf

figure 2-8). On se place bien dans le cas incompressible. Les conditions aux limites sont variation de pression nulle sur les bords selon la longueur et flux nul sur les bords selon la largeur. On constate que le code différences finies associé à l'équation de Reynolds donne des résultats à 5% près sur la variation de pression au point milieu par rapport au modèle élément fini de l'équation de Navier-Stokes en 3D. Ceci valide, pour le cas incompressible, les hypothèses faites pour dériver l'équation de Reynolds.



**Figure 2-8** Variation de pression au point milieu pour une excitation d'une structure rigide à 40% de l'entrefer et 1kHz et à une pression ambiante de  $1.013 \times 10^4$  Pa pour un modèle éléments finis de l'équation de Navier-Stokes et un modèle différences finies de l'équation de Reynolds.

## 2.3. *Modèle réduit de l'équation de Reynolds linéaire : application à la réponse fréquentielle.*

### 2.3.1. Analyse

On part de l'équation de Reynolds linéarisée établie précédemment (2-9). On approche la solution de l'équation de Reynolds linéaire par une méthode de Galerkin. Les fonctions de bases choisies sont les modes propres du Laplacien, les conditions aux limites correspondant à une variation de pression nulle sur les bords. La variation de pression  $p$  s'exprime alors :

$$p = \sum_{k=0}^N \alpha_k(t) p_k(x, y) \quad (2-26)$$

où les coefficients  $\alpha_k$  sont les coordonnées modales et les  $p_k$  les modes propres du Laplacien tels que :

$$\Delta p_k = -\lambda_k^2 p_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2-27)$$

En appliquant la séparation des variables à (2-27) on obtient :

$$p_k(x, y) = \frac{2}{\sqrt{LW}} \sin\left(k_1 \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(k_2 \frac{\pi}{W} y\right) \quad \text{avec } k_1 \geq 1, k_2 \geq 1 \quad (2-28)$$

où  $k = (k_2 - 1)N_x + k_1$

où  $N_x$  est le nombre de modes retenus selon la dimension  $x$ .

L'équation (2-9) projetée sur le  $l^{\text{ième}}$  mode propre a la forme suivante :

$$-\lambda_l^2 \alpha_l - \frac{12\mu}{G_0^2 P_0} \dot{\alpha}_l = \frac{12\mu}{G_0^3} \left\langle \frac{\partial G}{\partial t} \middle| p_l \right\rangle \quad l = 1, \dots, N \quad (2-29)$$

où  $\langle f | g \rangle = \int_{\Omega} f g d\Omega$  est le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  avec  $\Omega = [0, W] \times [0, L]$ .

On peut réécrire (2-29) de la manière suivante :

$$\dot{\alpha}_l + \frac{\alpha_l}{\tau_l} = -\frac{P_0}{G_0} \left\langle \frac{\partial G}{\partial t} \middle| p_l \right\rangle \quad l = 1, \dots, N \quad (2-30)$$

où  $\tau_l = \frac{12\mu}{G_0^2 P_0^2 \lambda_l^2}$

On impose un déplacement de la forme suivante :

$$G(x, t) = G_0 - w(x, t), \quad w(x, t) = A_1 \cos(2\pi f t) w_1(x) \quad (2-31)$$

où  $w_1(x)$  est le premier mode propre de l'équation d'Euler-Bernoulli associée au problème mécanique (cf Annexe B). En notation complexe, le déplacement s'écrit:

$$w(x, t) = \bar{A}_1 e^{j\omega t} w_1(x). \quad (2-32)$$

De la même manière que [Griffin 1966], on peut alors considérer dans l'espace des fréquences, la fonction de transfert associée à la coordonnée modale complexe  $\bar{\alpha}_l$  :

$$H_l(j\omega) = \frac{\bar{\alpha}_l}{A} = \frac{P_0}{G_0} \langle w_1 | p_l \rangle \frac{j \frac{\omega}{\omega_{cl}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{cl}}}, \quad l = 1, \dots, N \quad (2-33)$$

où  $\omega_{cl} = \frac{G_0^2 P_0^2 \lambda_l^2}{12\mu}$   $\lambda_l^2 = \frac{k_y^2 \pi^2}{W^2} + \frac{k_x^2 \pi^2}{L^2}$ ,  $l = 1, \dots, N$ . (2-34)

Ainsi la réponse de chaque mode de pression au déplacement peut être considérée indépendamment comme un filtre passe haut du premier ordre de pulsation de coupure  $\omega_c$  et de gain en haute fréquence

$$\frac{P_0}{G_0} \langle w_1 | p_l \rangle.$$

Ce gain dépend donc de la similarité des fonctions propres mécaniques et de pression. Si on considère la largeur  $W$  grande devant la longueur  $L$ , on retrouve [Griffin 1966] une expression courante de la pulsation de coupure d'un film d'air comprimé

$$\omega_c = \frac{G_0^2 P_0 \pi^2}{12 \mu W^2}$$

pour le premier mode de pression ( $k_x = 1, k_y = 1$ ). Un autre nombre caractéristique de l'importance de l'effet de compression est le nombre dit de « squeeze »

$$\sigma = \frac{12 \mu L^2 \omega}{G_0^2 P_0},$$

qu'on peut relier à la fréquence de coupure par la relation  $\sigma = \frac{\omega}{\omega_c} \pi^2$ .

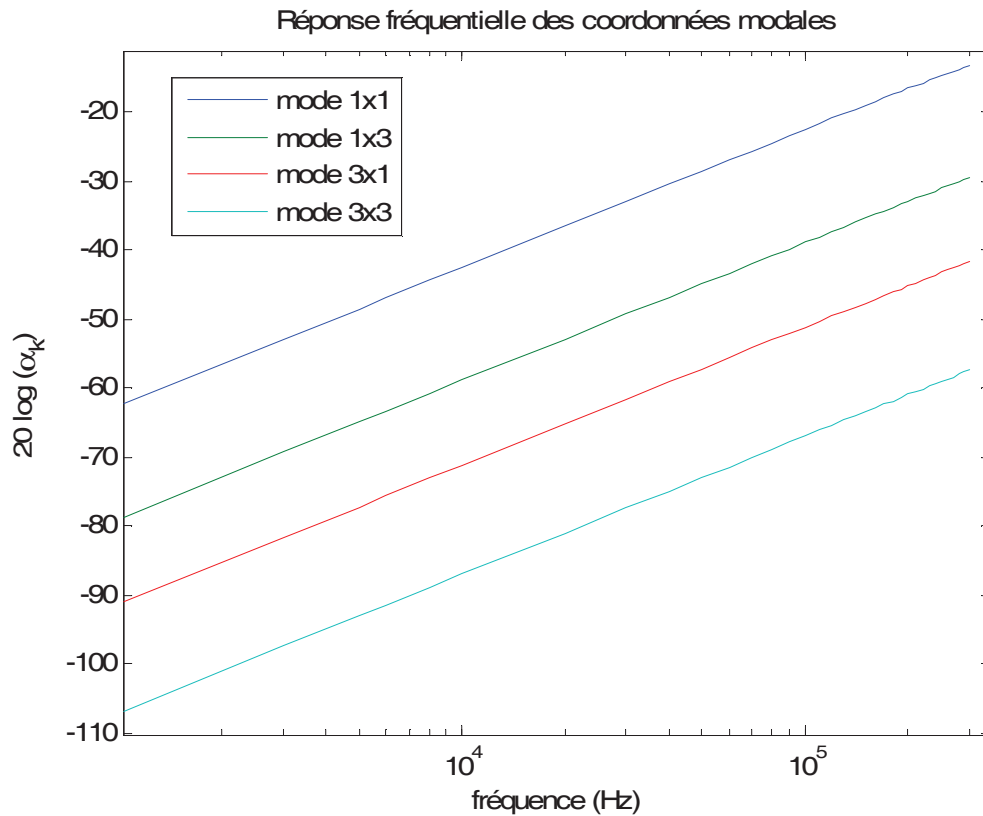
On peut décomposer la réponse en pression selon sa composante en phase avec le déplacement correspondant à l'effet de raideur, et sa composante en phase avec la vitesse correspondant à l'amortissement visqueux. Pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure le déphasage par rapport au déplacement vaut  $\frac{\pi}{2}$ , la pression est en phase avec la vitesse, le phénomène visqueux est dominant. A la fréquence de coupure le déphasage de la réponse en pression vaut  $\frac{\pi}{4}$ , les deux composantes sont donc égales. Au-delà de la fréquence de coupure, la pression est en phase avec le déplacement, l'effet de raideur est dominant.

### 2.3.2. Application numérique

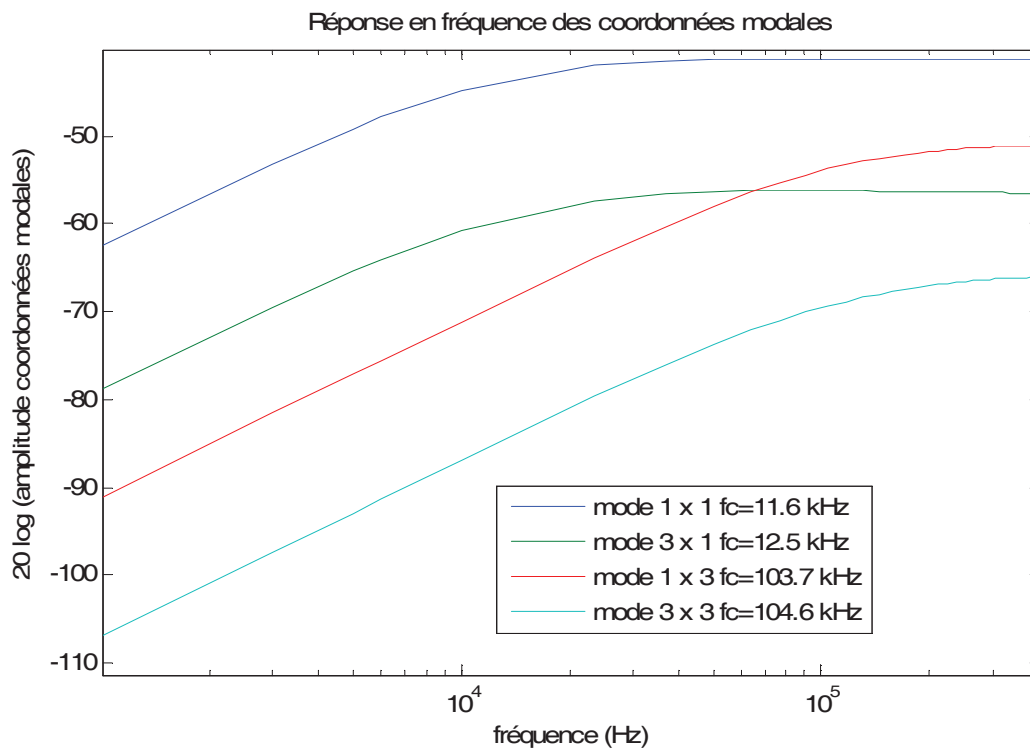
On s'intéresse à la réponse d'un film d'air compris entre un substrat et une poutre ayant les caractéristiques suivantes : longueur  $L=500 \mu\text{m}$ , largeur  $W=50 \mu\text{m}$ , écart au substrat  $G_0=2 \mu\text{m}$ .  $\bar{A}_1$  est choisi tel que le déplacement maximum corresponde au dixième de l'écart au substrat. On observe le comportement pour une plage de [0 300] kHz sachant que la plage qui nous intéresse est celle où le système mécanique développe un déplacement de l'ordre de quelques



microns, c'est-à-dire  $[0, f_M]$ ,  $f_M$  étant la fréquence propre du système mécanique. Par exemple, pour une épaisseur  $h=2 \mu\text{m}$  et une masse volumique  $\rho=2330 \text{ kg/m}^3$  de la poutre définie ci-dessus,  $f_M$  vaudra 65,7 kHz. On étudie la réponse fréquentielle pour deux pressions différentes : à pression atmosphérique  $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  et à une pression plus faible  $P_0 = 1.013 \times 10^3 \text{ Pa}$ . La fréquence de coupure de l'amortissement à pression atmosphérique valant plus de 1 MHz, le phénomène dominant sera donc la résistance due à la viscosité. A  $P_0 = 1.013 \times 10^3 \text{ Pa}$ , la fréquence de coupure vaut environ 11 kHz, le phénomène de compression devient important. Aux figures 2-9 et 2-10, on observe la réponse fréquentielle des 4 premières coordonnées modales correspondant aux modes  $k_1 = [1,3], k_2 = [1,3]$ . Dans les deux cas, le premier mode  $k_1 = 1, k_2 = 1$  est clairement dominant. On appelle  $[M \times N]$  le mode tel que  $k_1 = M, k_2 = N$ . Ainsi le filtre associé à ce premier mode  $[1 \times 1]$  donne effectivement une bonne idée qualitative de la réponse en fréquence. A pression atmosphérique, les quatre premiers modes de pression suffisent à obtenir une valeur de l'amplitude de la pression définie comme la pression maximum au point milieu à 1% près. A  $P_0 = 1.013 \times 10^3 \text{ Pa}$ , on constate qu'il faut prendre en compte jusqu'à seize modes de pression si on veut atteindre une précision de 1% sur l'amplitude de la pression, le nombre de ceux-ci nécessaires augmentant avec la fréquence d'excitation.



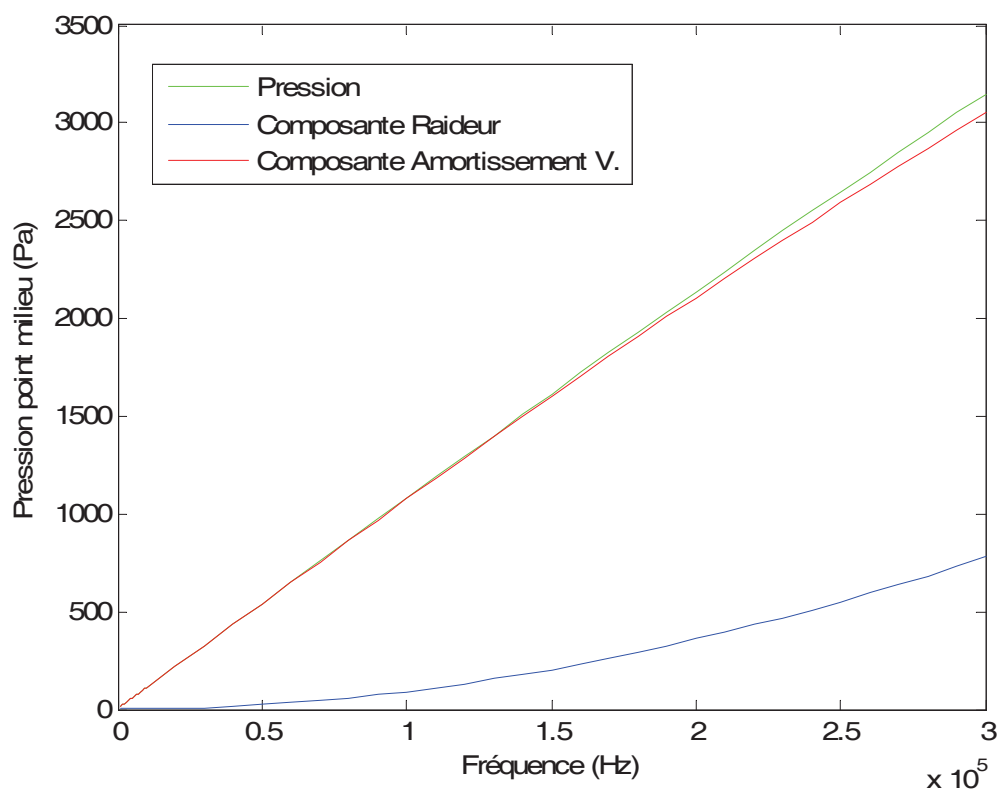
**Figure 2-9** Réponse fréquentielle des coordonnées modales à pression atmosphérique



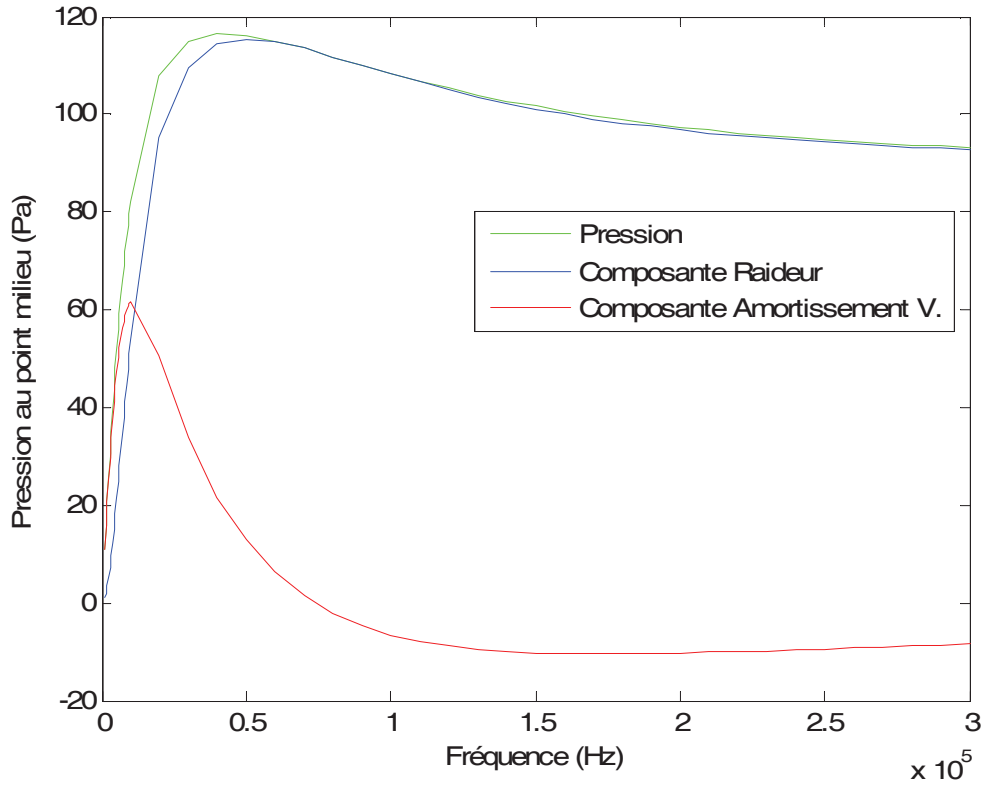
**Figure 2-10** Réponse fréquentielle des coordonnées modales à  $P_0 = 10^3 \text{ Pa}$ .

Sur les figures 2-11 et 2-12 on observe la réponse en fréquence de la pression au point milieu. On a extrait les composantes en phase avec respectivement le déplacement (effet de compression) et la vitesse (amortissement visqueux). On remarque qu'à pression atmosphérique, le phénomène prépondérant est l'amortissement visqueux. A  $P_0 = 1.013 \times 10^3$  Pa, l'effet de compression devient rapidement prépondérant, on atteint des variations relatives de pression plus importantes que dans le premier cas. Toutefois, les valeurs absolues de la variation de pression sont plus importantes pour une pression plus importante. Ainsi le film d'air aura une plus grande influence sur le système mécanique pour une pression ambiante importante même si dans ce cas le phénomène de compression est négligeable. Le système ne travaille pas sur la plage de fréquence où ce phénomène devient important.

On peut s'interroger sur la pertinence du modèle de viscosité. En effet à la pression  $P_0 = 1.013 \times 10^3$ , le libre parcours moyen n'est plus négligeable devant l'écart poutre-substrat, il faudrait en toute rigueur revoir le modèle et prendre en compte une viscosité efficace dépendant de l'écart à la poutre.



**Figure 2-11** Amplitude de la pression au point milieu et de ses composantes fonction de la fréquence à pression atmosphérique



**Figure 2-12** Amplitude de la pression au point milieu et de ses composantes fonction de la fréquence à pression  $P_0 = 1.013 \times 10^3$  Pa.

## 2.4. *Modèle réduit de l'équation de Reynolds non-linéaire : changement de variable*

On va ici établir un modèle réduit de l'équation de Reynolds valable pour une structure flexible en grands déplacements avec toutefois l'hypothèse des petites variations de pression. Les cas d'une viscosité constante et du modèle de Knudsen seront traités. Un changement de variable sur la pression sera fait afin d'obtenir un opérateur spatial sur la nouvelle variable pour lequel il sera particulièrement pertinent d'utiliser les modes propres du Laplacien.

### 2.4.1. Hypothèse des petites variations de pression

On se place d'abord dans le cas où la viscosité du fluide est supposée constante et uniforme, l'équation de Reynolds a la forme (2-8).

On définit les variables normalisées :

$$\tilde{p} = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{p}{P_0} \quad (2-35a)$$

$$\tilde{g} = \frac{G - G_0}{G_0} \quad (2-35b)$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \tilde{y} = \frac{y}{w}, \tau = \frac{t}{T} \quad (2-35c)$$

où  $T$  est une durée caractéristique du mouvement.

On fait l'hypothèse des petites variations de pression, mais pas des petits déplacements. On définit cette hypothèse comme correspondant à une variation de pression relative de 10% maximum.

On réécrit (2-8) avec les variables sans dimensions :

$$\begin{aligned} & \frac{P_0^2 G_0^3}{L^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \frac{(1 + \tilde{g})^3}{12\mu} (1 + \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{P_0^2 G_0^3}{w^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[ \frac{(1 + \tilde{g})^3}{12\mu} (1 + \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \right] \\ &= \frac{G_0 P_0}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} (1 + \tilde{g})(1 + \tilde{p}) \end{aligned} \quad (2-36)$$

$\bar{\nabla} \tilde{p}$  ne peut pas être considéré comme un terme d'ordre un en  $\tilde{p}$ . Un ordre de grandeur des termes  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$  et  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$  est  $2\tilde{p}_{\max}$ , la variation de pression étant maximum au milieu de la poutre. Le

profil n'étant pas régulier, les variations selon l'espace peuvent très bien prendre une valeur très supérieure à  $2\tilde{p}_{\max}$ . On va toutefois négliger le terme  $\tilde{p} \bar{\nabla} \tilde{p}$ , en considérant que  $\bar{\nabla} \tilde{p}$  est petit devant 1 aussi. On le vérifie a posteriori. On considère que le terme  $\tilde{p} \bar{\nabla} \tilde{p}$  est d'ordre deux.

Pour le cas étudié ci-dessous (§2.4.5), à la limite de validité du modèle  $\tilde{p}_{\max} \approx 0.1$ , les termes du gradient atteignent une valeur de 0.4. On constate donc bien que  $\bar{\nabla} \tilde{p}$  prend des valeurs supérieures à  $\tilde{p}$  mais reste toutefois petit devant 1. De même on considère que le fait de prendre la divergence de ce terme ne change pas son ordre de grandeur. Si on revient aux coordonnées initiales (2-8) est devenue :

$$\bar{\nabla} \left( \frac{G^3}{12\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) \quad (2-37)$$

## 2.4.2. Changement de variable

On a fait un changement de variable sur  $p$  pour que l'opérateur spatial ait une forme plus intéressante pour l'application de la méthode de Galerkin. Cette transformation est valable pour le modèle de viscosité constante, et pour un des modèles de Knudsen [Hung 1999] où la viscosité effective vaut

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu}{1 + 6K_n},$$

On remarque tout d'abord la propriété suivante pour des fonctions scalaires  $\psi(x, y)$  et  $\phi(x, y)$  quelconques :

$$\bar{\nabla} \cdot (\psi \bar{\nabla} (\phi \psi^{-1/2})) = \psi^{1/2} \Delta \phi - \phi \Delta \psi^{1/2} \quad (2-38)$$

On applique le changement de variable suivant à la variation de pression  $p$  :

$$p = \phi \psi^{-1/2} \quad (2-39)$$

où

$$\psi(G) = G^3$$

pour une viscosité supposée constante

ou

$$\psi(G) = (1 + 6K_n) G^3$$

pour le régime de Knudsen.

On appelle  $\phi$  la fonction «amortissement». L'équation (2-37) prend alors la forme suivante :

$$\bar{\nabla} \cdot (\psi(G) \bar{\nabla} (\phi \psi^{-1/2}(G))) = 12\mu_N \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{\phi \psi^{-1/2}(G)}{P_0} \right) \right) \quad (2-40a)$$

On applique (2-38) au membre de gauche de (2-40a) et on divise par  $\psi(G)^{1/2}$ . On obtient (2-40b):

$$\Delta \phi - \phi \frac{\Delta \psi^{1/2}}{\psi^{1/2}} = \frac{12\mu_N}{\psi^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{\phi \psi^{-1/2}}{P_0} \right) \right). \quad (2-40b)$$

### 2.4.3. Méthode de résolution numérique

On utilise la méthode de Galerkin : on projette l'équation (2-40b) sur les modes  $\phi_k$  sur lesquels on développe la solution.  $s_k$  sont les coordonnées modales. On obtient :

$$\sum_{k=1}^N \left( \langle \Delta \phi_k | \phi_l \rangle - \left\langle \frac{\Delta \psi^{1/2}}{\psi^{1/2}} \phi_k \middle| \phi_l \right\rangle \right) s_k =$$

$$12\mu_N \left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G}{\partial t} \middle| \phi_l \right\rangle + \frac{12\mu_N}{P_0} \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G \psi^{-1/2} s_k}{\partial t} \phi_k \middle| \phi_l \right\rangle \quad (2-41)$$

avec  $l=1, \dots, N$

Telle quelle, (2-41) ne peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations linéaires en  $\mathbf{s}$  et  $\dot{\mathbf{s}}$ . Une solution consiste à discrétiser le deuxième terme du membre de droite dans le temps, Pour un schéma implicite à pas fixe  $\Delta t$ , ce terme s'écrit :

$$\left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G \psi^{-1/2} s_k}{\partial t} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \left\langle \frac{1}{(\psi^{1/2})^{t+\Delta t}} (G \psi^{-1/2})^{t+\Delta t} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle s_k^{t+\Delta t} - \left\langle \frac{1}{(\psi^{1/2})^t} (G \psi^{-1/2})^t \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle s_k^t \right] \quad (2-42)$$

L'intégration dans le temps de (2-41) peut alors se faire par la résolution d'un système linéaire (2-43). Le schéma est implicite.

$$\mathbf{s}^{t+1} = (\Delta t \mathbf{H}(G)^{t+\Delta t} - \mathbf{A}(G)^{t+\Delta t})^{-1} (\Delta t \mathbf{f}(G, \dot{G})^{t+\Delta t} - \mathbf{A}(G)^{t,t+\Delta t} \mathbf{s}^t) \quad (2-43)$$

où

$$\mathbf{H}_{lk}(G) = -\lambda_k^2 \delta_{kl} - \left\langle \frac{\Delta \psi^{1/2}}{\psi^{1/2}} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-44a)$$

$$\mathbf{f}_l(\dot{G}) = 12 \mu_N \left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G}{\partial t} \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-44b)$$

pour lequel on connaît une expression analytique de  $\frac{\partial G}{\partial t}$ .

$$\mathbf{A}_{lk}(G)^{t+\Delta t} = \left\langle \frac{1}{(\psi^{1/2})^{t+\Delta t}} (G \psi^{-1/2})^{t+\Delta t} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-44c)$$

$$\mathbf{A}_{lk}(G)^{t,t+\Delta t} = \left\langle \frac{1}{(\psi^{1/2})^{t+\Delta t}} (G \psi^{-1/2})^t \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-44d)$$

et  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$

On intégrera (2-41) dans le temps de cette manière pour la validation par rapport à un modèle différences finies.

La deuxième solution consiste à développer le deuxième terme du membre de droite de (2-41) de manière à faire apparaître  $\mathbf{s}$  et  $\dot{\mathbf{s}}$ . (2-41) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{Q}(G, \dot{G}) \mathbf{s} = \mathbf{B}(G) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{F}(G, \dot{G}) \quad (2-45)$$

si on pose:

$$\mathbf{Q}_{lk}(G, \dot{G}) = -\lambda_k^2 \delta_{kl} - \left\langle \frac{\Delta \psi^{1/2}}{\psi^{1/2}} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle - \frac{12 \mu_N}{P_0} \left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G \psi^{-1/2}}{\partial t} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-46a)$$

$$\mathbf{B}_{lk}(G) = \frac{12 \mu_N}{P_0} \left\langle G \psi^{-1} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-46b)$$

$$\mathbf{F}_l(G, \dot{G}) = 12\mu_N \left\langle \frac{1}{\psi^{1/2}} \frac{\partial G}{\partial t} \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (2-46c)$$

$$\text{où } \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T \quad (2-46d)$$

Cette forme de l'équation projetée (2-45) servira pour la résolution du modèle couplé fluide-structure dans le chapitre 3.

#### 2.4.4. Modes propres du Laplacien

On cherche une approximation de  $\varphi$  sous la forme suivante:

$$\varphi^N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) \varphi_k(x, y) \quad (2-47)$$

où les  $\varphi_k$  sont les modes propres du Laplacien :

$$\Delta \varphi_k = -\lambda_k^2 \varphi_k \quad (2-48)$$

associés aux conditions aux limites que l'on va déterminer.

Pour des géométries et conditions aux limites simples, il existe une expression analytique de ces modes. On cherche maintenant à exprimer les conditions limites pour un cas simple. En effet, la fonction amortissement  $\varphi$  n'ayant pas de signification physique, on obtient les conditions aux limites à partir des conditions sur  $p$  et  $G$ . Pour une condition correspondant à une variation de pression nulle, on obtient clairement :

$$p = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \quad (2-49)$$

On traite le cas d'une poutre définie pour  $(x, y) \in [0, L] \times [0, W]$ , encastree par le haut en  $x = 0$  et  $x = L$  et libre sur les autres bords, les conditions limites sont donc:

$$\begin{cases} \varphi_k(0, y) = \varphi_k(L, y) = 0 \\ \varphi_k(x, 0) = \varphi_k(x, W) = 0 \end{cases}, \quad (2-50)$$

L'équation (2-28) donne l'expression analytique des ces modes dans ce cas précis.

#### 2.4.5. Validation du modèle

On montre la validité du modèle réduit par comparaison à un modèle différences finies de l'équation (2-37) avec l'hypothèse des petites variations de pression:

$$\bar{\nabla} \left( \frac{G^3}{12\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{\partial G}{\partial t} \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) + \frac{G}{P_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-51)$$



Le détail concernant le code différences finies est fourni en annexe C. On impose le déplacement d'une poutre encastree-encastree de longueur  $L=500 \mu\text{m}$ , largeur  $W=50 \mu\text{m}$ , et écart initial  $G_0= 3 \mu\text{m}$  à une pression ambiante de  $P_0=10^3 \text{ Pa}$ . La viscosité est supposée constante et uniforme. On impose le déplacement de la poutre à une fréquence  $f = 3 \text{ kHz}$  et une amplitude de  $\alpha G_0$ :

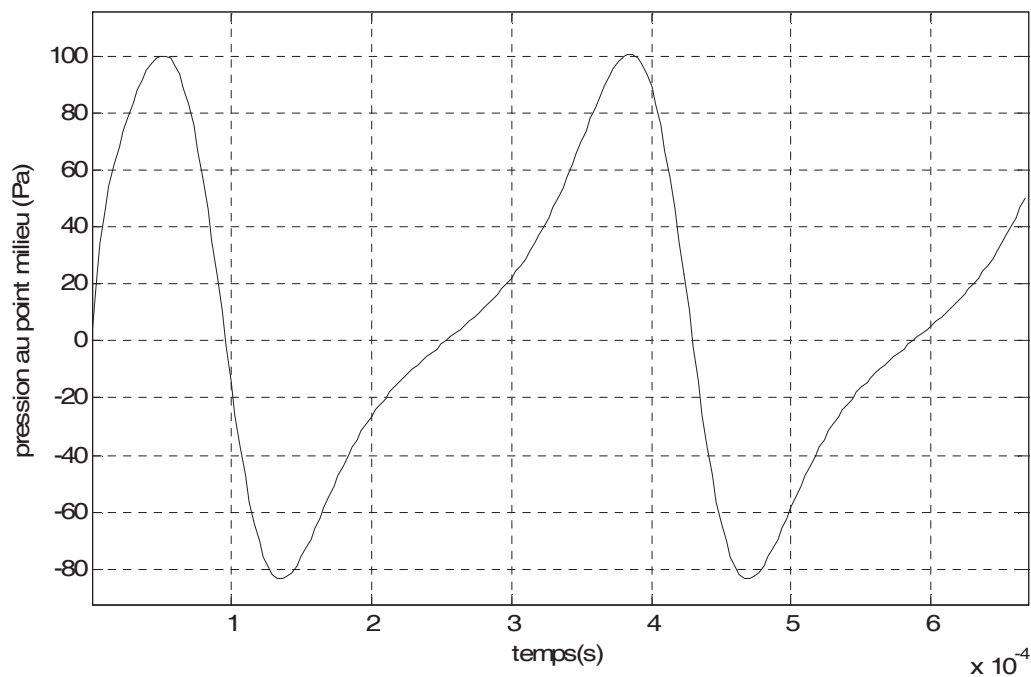
$$G(x,t) = G_0(1 - \alpha w_1(x) \sin(2\pi f t)), \quad (2-52)$$

où  $w_1(x)$  est le premier mode propre mécanique de l'équation d'Euler-Bernoulli (cf annexe B). On utilise un schéma Euler-implicite pour le modèle réduit et le modèle différences finies. Pour le modèle réduit on utilise 4 modes correspondant à  $k_1 = [1,3]$ ,  $k_2 = [1,3]$ . La figure 2-13 représente la pression au point milieu de la poutre avec un maillage de 51x21 nœuds, 200 pas de temps par période et  $\alpha = 0.4$ . On remarque que la variation de pression maximum est de l'ordre de  $P_0 / 10$ , ce qui correspond à la limite de validité du modèle. Le nombre de squeeze  $\sigma$  vaut environ 70.

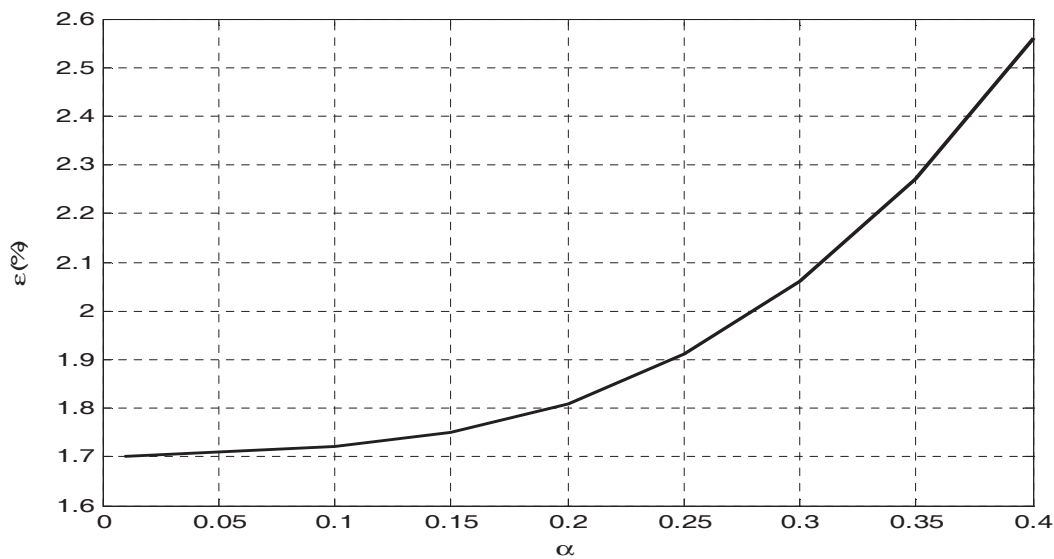
La figure 2-14 représente l'erreur relative entre les deux modèles pour la projection de la pression sur le premier mode mécanique pour différentes valeurs de  $\alpha$  et la même fréquence d'excitation :

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\| \langle P_{MOR}(\alpha) | w_1 \rangle - \langle P_{DF}(\alpha) | w_1 \rangle \|_2}{\| \langle P_{DF}(\alpha) | w_1 \rangle \|_2}. \quad (2-53)$$

On constate qu'il y a un terme d'erreur d'environ 2% même pour de faibles valeurs de  $\alpha$ . Cette erreur peut être réduite si l'on diminue le pas de temps (pour  $\alpha=0.1$ , on peut descendre en dessous de 1%). A la limite de validité du modèle, l'erreur est de 3%.



**Figure 2-13** Variation de pression du point milieu de la poutre pour  $\alpha = 0.4$ .



**Figure 2-14** Erreur relative de la projection de la pression sur le premier mode mécanique entre pour le modèle réduit (2x2 modes) et le modèle différences finies (51 x 21 noeuds)

#### 2.4.6. Intérêt du changement de variable

On compare ici le modèle proposé à d'autres résolutions possibles par la méthode de Galerkin. Les résultats sont comparés à un modèle différences finies. Le modèle proposé donne de meilleurs résultats que la résolution par projection directe de l'équation de Reynolds. Des considérations théoriques sont ensuite envisagées.

(2-54) correspond à l'équation inchangée. Dans (2-55), on a développé le terme de gauche de (2-37) et divisé par  $G^3$ . (2-56) est le modèle établi par changement de variable, objet de l'étude.

$$\bar{\nabla} \cdot \left( \frac{G^3}{12\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) \quad (2-54) \text{ (Version 1)}$$

$$\Delta p = -3\bar{\nabla} \log G \cdot \bar{\nabla} p + \frac{12\mu}{G^3} \left( \frac{\partial}{\partial t} G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) \quad (2-55) \text{ (Version 2)}$$

$$\Delta \varphi = \varphi \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} + \frac{12\mu}{G^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) \quad (2-56) \text{ (Version 3)}$$

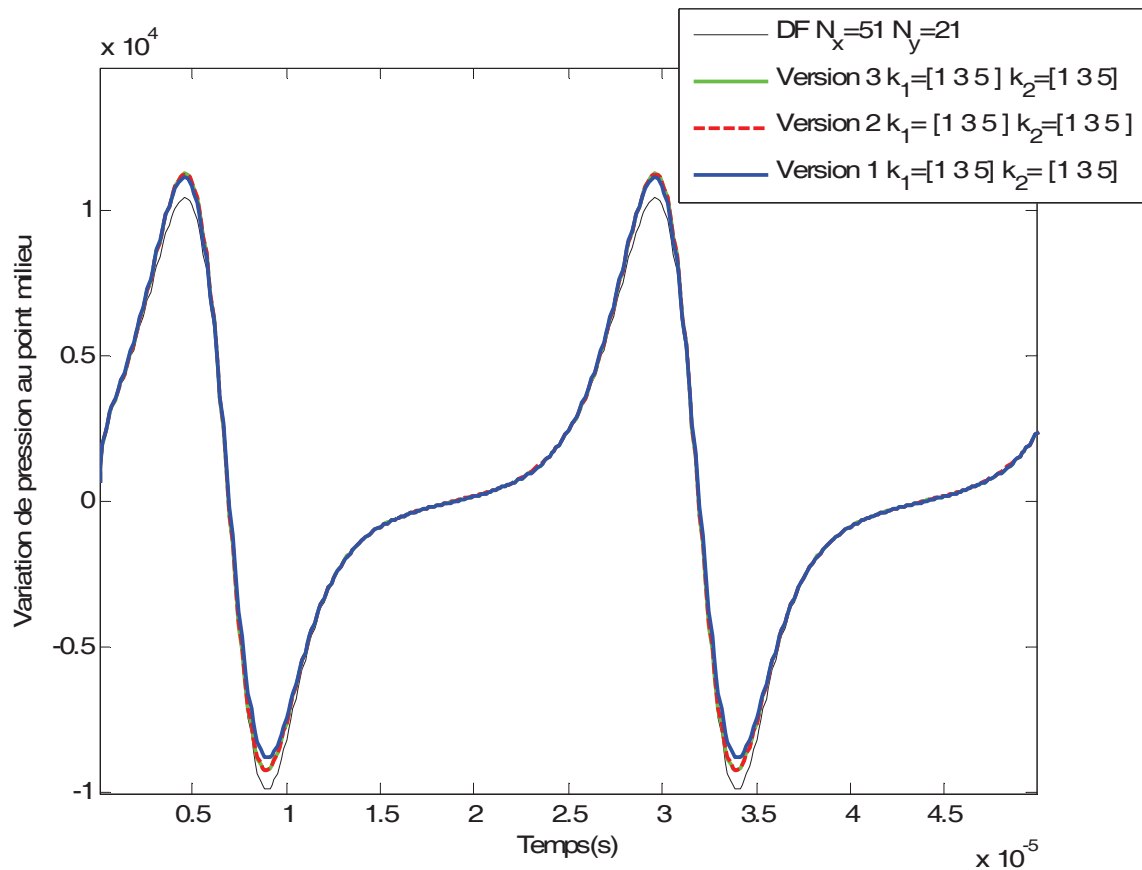
avec  $p = \varphi G^{-3/2}$ .

Pour (2-54) et (2-55) on développera  $p$  sur les  $N$  modes propres du Laplacien sélectionnés, pour (2-56) on développe  $\varphi$ . On utilise ensuite la méthode de Galerkin, on projette les équations sur les modes qui servent à approximer  $p$  ou  $\varphi$ .

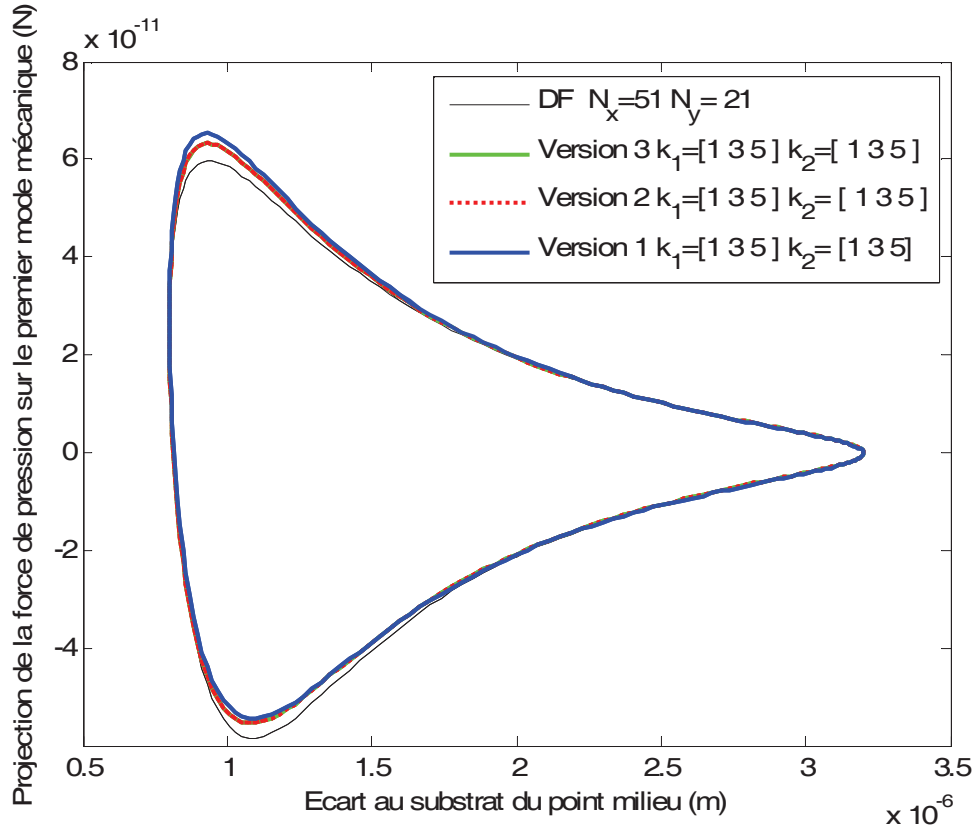
### 2.4.6.1. Résultats

On impose le déplacement d'une poutre de longueur  $L=500 \mu\text{m}$ , de largeur  $W=50 \mu\text{m}$  et d'écart initial  $G_0=2 \mu\text{m}$  à une pression ambiante de  $P_0=10^5 \text{ Pa}$ . Comme précédemment, la forme du déplacement correspond au premier mode mécanique et on impose  $\alpha = 0.6$  et  $f=40 \text{ kHz}$ .

On compare sur la figure 2-15 les tracés de la pression au point milieu pour les 3 modèles réduits et le modèle différences finies. On a choisi le nombre de modes pour chaque modèle réduit de sorte que l'ajout d'un mode supplémentaire ne change pas la valeur de pression calculée de plus de 1%. Dans les trois cas, on trouve  $k_1=[1,3,5]$  et  $k_2=[1,3,5]$ . On constate que le tracé du modèle réduit établi par changement de variable (Version 3) présente de meilleurs résultats que la version 1. Elle ne présente toutefois pas de meilleurs résultats que la version 2.



**Figure 2-15** Variation de pression au point milieu pour les trois résolutions de l'équation proposées et le modèle différences finies.



**Figure 2-16** Projection de la force fluide sur le premier mode mécanique en fonction de l'écart entre le point milieu de la poutre et le substrat.

On représente également la grandeur qui est intéressante dans le cadre d'un modèle couplé fluide-structure, c'est-à-dire la projection de la pression sur le premier mode mécanique (figure 2-16). On constate de nouveau les meilleurs résultats des versions 2 et 3. On fait remarquer que le modèle 3 présente l'avantage par rapport au modèle 2 de ne faire intervenir que des matrices symétriques, ce qui réduit le coût d'évaluation du modèle. Le modèle 3 est donc dans l'ensemble plus avantageux.

#### 2.4.6.2. Considérations théoriques

Les modes propres  $\varphi_i$  du Laplacien définis sur  $\Omega = [0, L] \times [0, W]$  associés à des conditions limites  $B$  forment une base complète de l'espace  $F$  des fonctions continues de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  [Sobolev 1989]. C'est-à-dire que toute fonction continue  $f \in F$  peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x, y) \quad (2-57)$$

Cette série converge en moyenne. De plus, si  $f$  respecte les conditions limites  $B$  et est de classe  $C^2$  même sur les frontières alors la série converge uniformément. Ainsi  $\varphi$  dans (2-56) et

$p$  dans (2-54,2-55) sont exprimés sous la forme d'un développement série de  $N$  modes propres du Laplacien respectant les conditions limites  $B$  de  $\varphi$  ou  $p$  :

$$\varphi^{(N)} = \sum_{k=1}^N s_k(t) \varphi_k(x, y) \quad (2-58)$$

Ces fonctions sont bien  $C^2$  puisque les équations différentielles qui les régissent font intervenir leur Laplacien. Ce développement est particulièrement pertinent pour (2-55) et (2-56) du fait de la présence de l'opérateur Laplacien dans l'opérateur spatial sur respectivement  $\varphi$  et  $p$ . Les modèles réduits sont en effet établis par projection des équations sur les  $N$  modes propres du Laplacien sélectionnés. On regarde maintenant si les termes de cette équation peuvent s'écrire sur cette base. On les considère comme des fonctions  $f(x, y)$  de  $\Omega = [0, L] \times [0, W]$  dans  $\mathbb{R}$ . Si elles peuvent être exprimée selon un développement série qui y converge uniformément, on garantit la conservation de l'essentiel de l'énergie de ces fonctions par projection sur l'ensemble sélectionné  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ . Il y a convergence uniforme si ces fonctions vérifient les conditions limites  $B$  et si elles sont  $C^2$ . Les termes  $\Delta\varphi$  et  $\Delta p$  peuvent être exprimés exactement sur cette base puisque  $\varphi$  ou  $p$  le sont et que les fonctions de bases sont les modes propres du Laplacien. On s'intéresse à une poutre encastree-encastree par le haut où la variation de pression est nulle sur les bords libres et encastres. Dans les trois cas, seul le terme faisant intervenir la dérivée temporelle de l'écart à savoir  $\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{1}{G^3} \frac{\partial G}{\partial t}$  et  $\frac{1}{G^{3/2}} \frac{\partial G}{\partial t}$  ne respecte pas la condition valeur nulle sur les bords  $y = 0$  et  $y = W$ . Les termes des équations sont  $C^\infty$ .

Ainsi, seule la forme de l'opérateur spatial de (2-55) et (2-56) est un argument en faveur de ces formes de l'équation. Les résultats sont en effet meilleurs comparés au modèle différences finies.

## **2.5. Choix d'une base de projection de l'équation de Reynolds non-linéaire**

Dans cette section, on travaille sur la variable  $p$  sauf au §2.5.4.2 où l'on rappellera les résultats du modèle avec changement de variable.

### **2.5.1. Modes propres du Laplacien**

Les modes propres du Laplacien sont les modes propres de l'équation de Reynolds linéarisée au sens où [Bai 2002] l'entend (cf § 1.2.1). C'est-à-dire que ce sont les modes propres de la

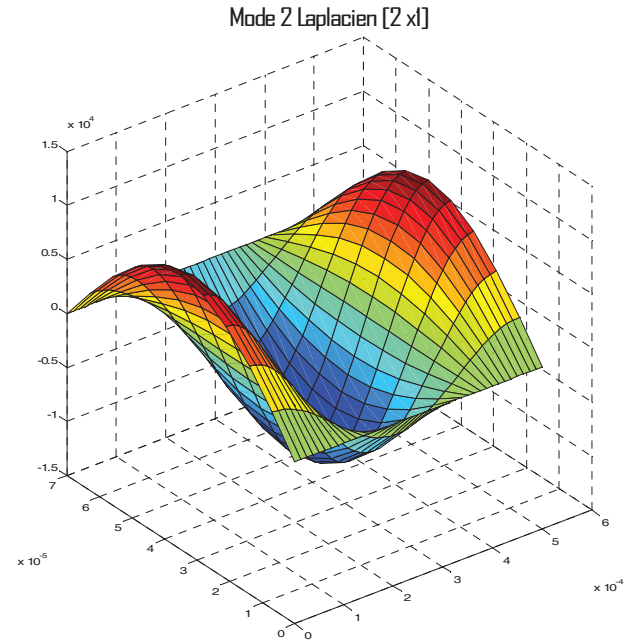
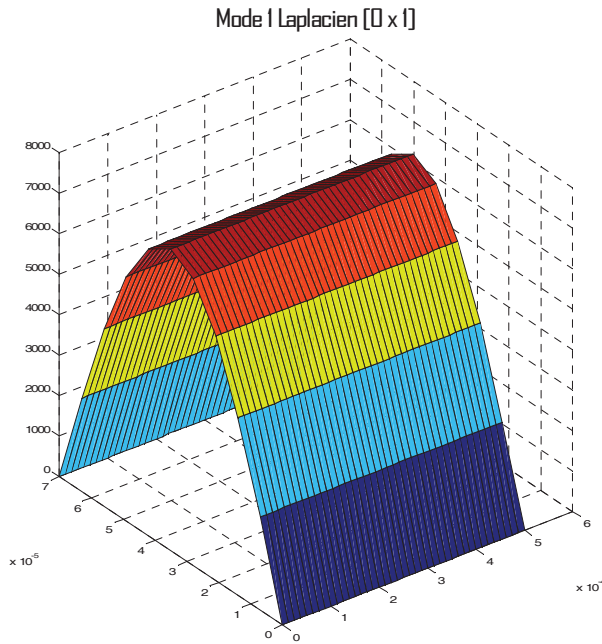
paire de matrice  $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$  de l'équation linéaire discrétisée selon un schéma différences finies mis sous la forme (1-5). On se place dans le cas d'une poutre encastrée à ses deux extrémités par le bas. Le flux est nul au niveau des bords encastrés, les conditions limites deviennent :

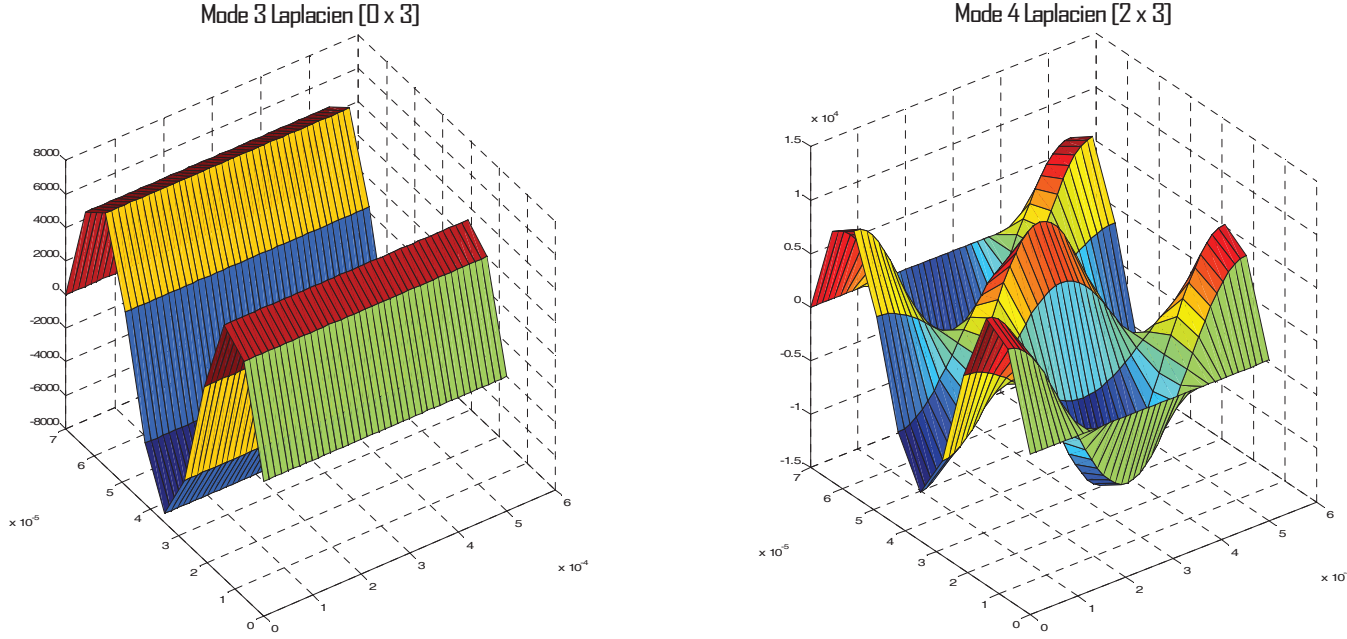
$$\begin{cases} \left. \frac{\partial p_k}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p_k}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \\ p_k(x, 0) = p_k(x, W) = 0 \end{cases}, \quad (2-59)$$

Par la méthode de la séparation des variables appliquées à (2-48) associée aux conditions limites (2-59), on obtient :

$$\begin{cases} p_k(x, y) = p_{k_1, k_2}(x, y) = \frac{C_{k_1}}{\sqrt{LW}} \cos\left(k_1 \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(k_2 \frac{\pi}{W} y\right) \\ C_{k_1} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } k_1 = 0 \\ 2 \sin & \end{cases} \end{cases} \quad k_1 \geq 0, k_2 \geq 1 \quad (2-60)$$

La figure (2 -17) présente la forme des quatre premiers pour les conditions aux limites données.





**Figure 2-17** Quatre premier modes propres du Laplacien ( $[0 \times 1]$ ,  $[2 \times 1]$ ,  $[0 \times 3]$  et  $[2 \times 3]$ ) pour les conditions aux limites (2-59).

### 2.5.2. Base de Krylov (Approximant de Pade)

La base est déterminée à partir de l'équation linéaire (2-9) qui discrétisée dans l'espace selon un schéma différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{B}\frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2-61)$$

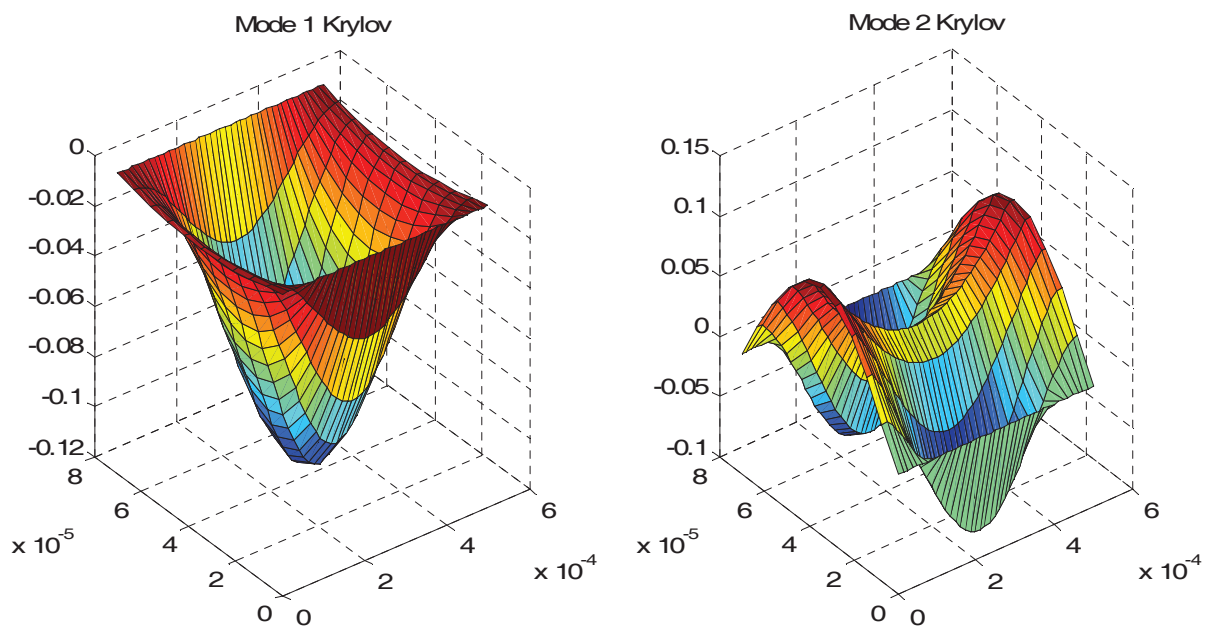
où  $\mathbf{p}$  est le vecteur des pressions et  $\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées modales. La matrice  $\mathbf{B}$  constante contient les modes propres mécaniques afin d'obtenir finalement comme entrées les vitesses en chacun des points de la poutre. On fera ainsi remarquer que  $\mathbf{A}$  est à un coefficient près l'opérateur Laplacien et que l'on considère que les entrées de ce système sont les coordonnées modales vitesses. On rappelle que l'objectif de cette méthode est d'obtenir un système linéaire d'ordre réduit dont la fonction de transfert approxime correctement la fonction de transfert originale autour d'une certaine fréquence. Des détails sont donnés au § 1.2.2. Ici on choisit la fréquence 0 Hz. On détermine la base de projection via le processus d'Arnoldi [Chen 2001] décrit en annexe D. Il s'agit d'une base du sous espace de Krylov

$K_r(\mathbf{A}_1, \mathbf{r}) = \text{vect}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}_1\mathbf{r}, \mathbf{A}_1^2\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}_1^{k-1}\mathbf{r}\}$  avec :

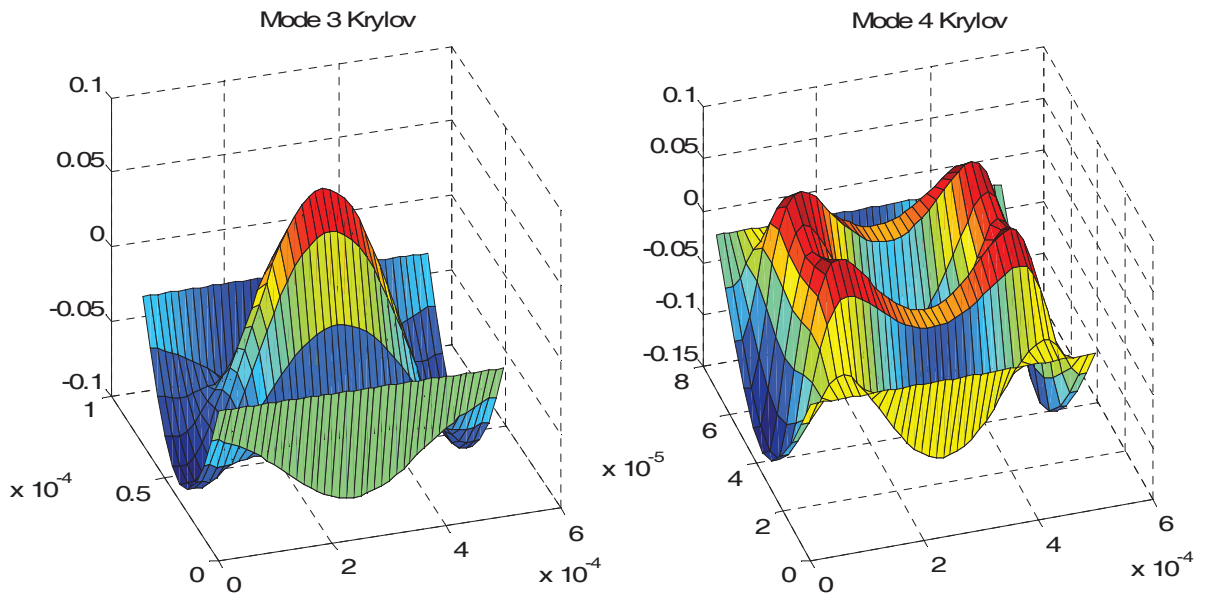
$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{cases} \quad (2-62)$$



La figures 2-18 représente les quatre premiers modes de pression de la base de Krylov générée pour les paramètres suivants :  $L=500 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $W=70 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $h=2 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $G_0=3 \text{ } \mu\text{m}$ , pression  $P_0 = 1.013 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ , l'air ayant une viscosité supposée constante de  $1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ , le fluide étant supposé continu. Les matrices décrivant le système ne dépendent de ces paramètres qu'à un facteur près, la base obtenue de va donc pas dépendre de ses paramètres au final. Ces modes sont à comparer aux modes propres du Laplacien de la figure 2-10 qui sont aussi les modes propres de la paire de matrice  $(\mathbf{I}, \mathbf{A})$  du système linéaire (2-66). On constate qu'on ne retrouve pas le premier mode propre du Laplacien mais plutôt des modes qui s'apparentent aux modes  $[2 \times 1]$  et  $[2 \times 3]$  des modes propres du Laplacien.



).



**Figure 2-18** Quatre premiers modes de pression issus du processus d'Arnoldi (générant la base du sous espace de Krylov).

### 2.5.3. Modes issus de la décomposition propre orthogonale.

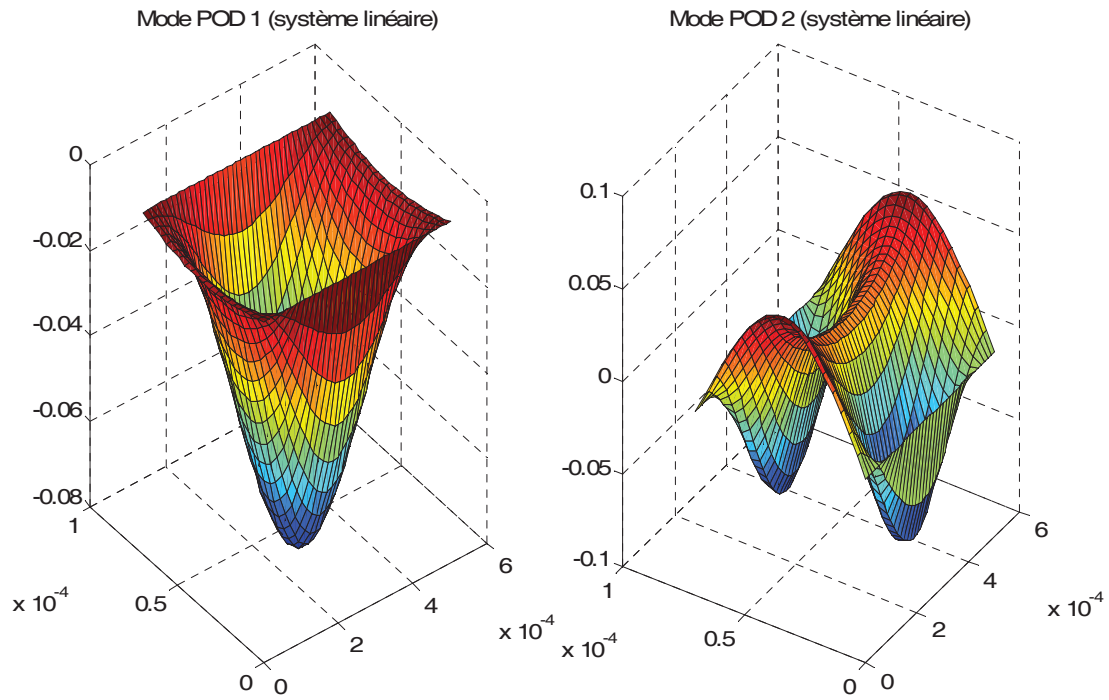
On utilise le code différences finies (2-61) associé à l'équation de Reynolds linéaire puis le code différences finies décrit en annexe C associé à l'équation (2-51) non-linéaire pour pratiquer la décomposition propre orthogonale sur une série d'instantanés afin d'obtenir des bases de projection. On comparera les deux bases obtenues puis les résultats de la projection de l'équation de Reynolds non-linéaire (2-61) sur ces deux bases. Pour le cas où l'on extrait une base de la simulation du système non-linéaire, on étudiera dans quelle mesure la trajectoire d'apprentissage détermine la validité de la base de projection issue de la décomposition propre orthogonale, et dans quelle mesure les fonctions de base peuvent être réutilisées pour d'autres paramètres géométriques.

#### 2.5.3.1. Extraction des modes : Décomposition propre orthogonale

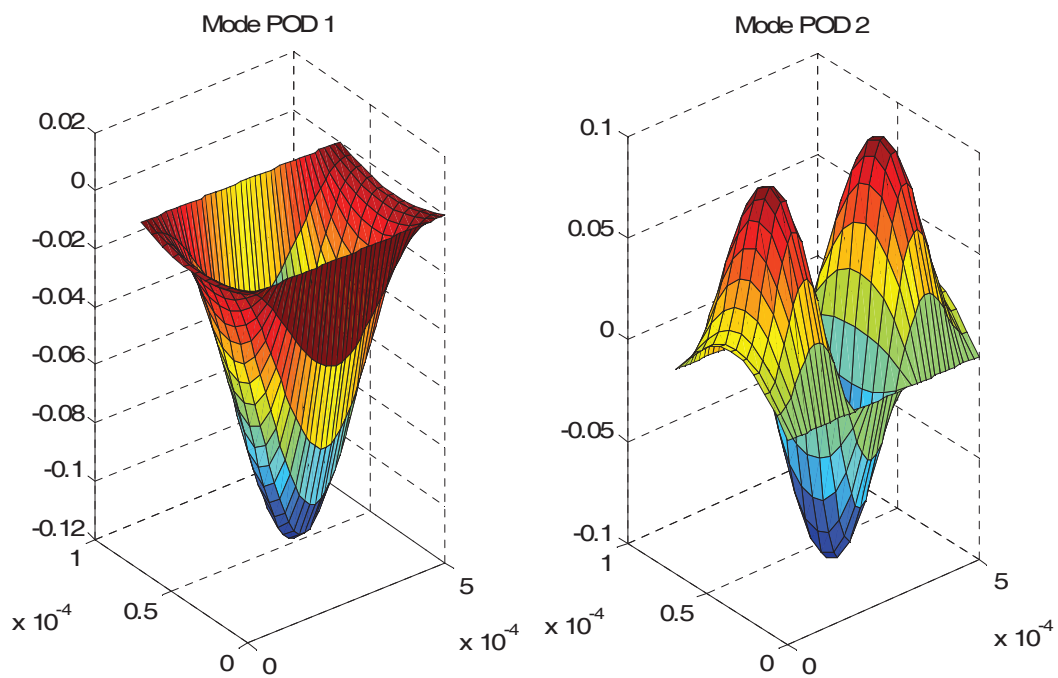
On travaille sur une poutre ayant les paramètres suivant :  $L=500 \mu\text{m}$ ,  $W=70 \mu\text{m}$ ,  $h=2 \mu\text{m}$ ,  $G_0=3 \mu\text{m}$ . On se place dans un premier temps à la pression de  $1.013 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ , l'air ayant une viscosité supposée constante de  $1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ , le fluide étant supposé continu. On excite le premier mode propre de la poutre à une amplitude de 20% de l'écart ( $\alpha = 0.2$ ) au substrat et à une fréquence de 50 kHz. La fréquence de coupure de l'amortissement du film d'air compressé étant égale à 134 kHz, on est dans le cas où la compressibilité du film d'air a de

l'importance. De plus la fréquence propre de la poutre vaut 66 kHz, donc on est dans le cas où l'amortissement influence fortement la dynamique du système mécanique dans le cas où l'on s'intéresse au modèle couplé.

On se base sur les deux codes différences finies avec un maillage de 41 points sur la longueur et 11 sur la largeur. On relève 41 instantanés sur les 401 points du schéma d'intégration dans le temps, ceci sur une période du mouvement. On réalise une décomposition en valeurs singulières des matrices de ces instantanés. On rappelle que les valeurs propres associées à chaque vecteur de base sont les carrés des valeurs de la matrice diagonale obtenue. Pour l'extraction à partir du système linéaire, la première fonction de base concentre 99.96% de l'énergie des instantanés et les deux premières 100%. Pour l'extraction à partir du système non linéaire, la première fonction de base concentre 99.74% de l'énergie, les deux premières fonctions 99.96%. La figure 2-19 montre les modes POD issus de la simulation de l'équation linéaire, la figure 2-20 les modes issus de la simulation de l'équation non-linéaire dans les conditions décrites au paragraphe ci-dessus. Dans les deux cas, le premier mode peut s'apparenter au mode propre  $[2 \times 1]$  du Laplacien. Le deuxième mode issu de la simulation du système linéaire s'apparente au mode propre  $[2 \times 3]$  du Laplacien et est très similaire au deuxième mode de la base de Krylov (cf §2.2.4). Par contre le deuxième mode POD issu de la simulation du système non-linéaire s'apparente difficilement à un mode propre du Laplacien. On remarque que les deuxièmes modes sont très différents d'une simulation à l'autre.

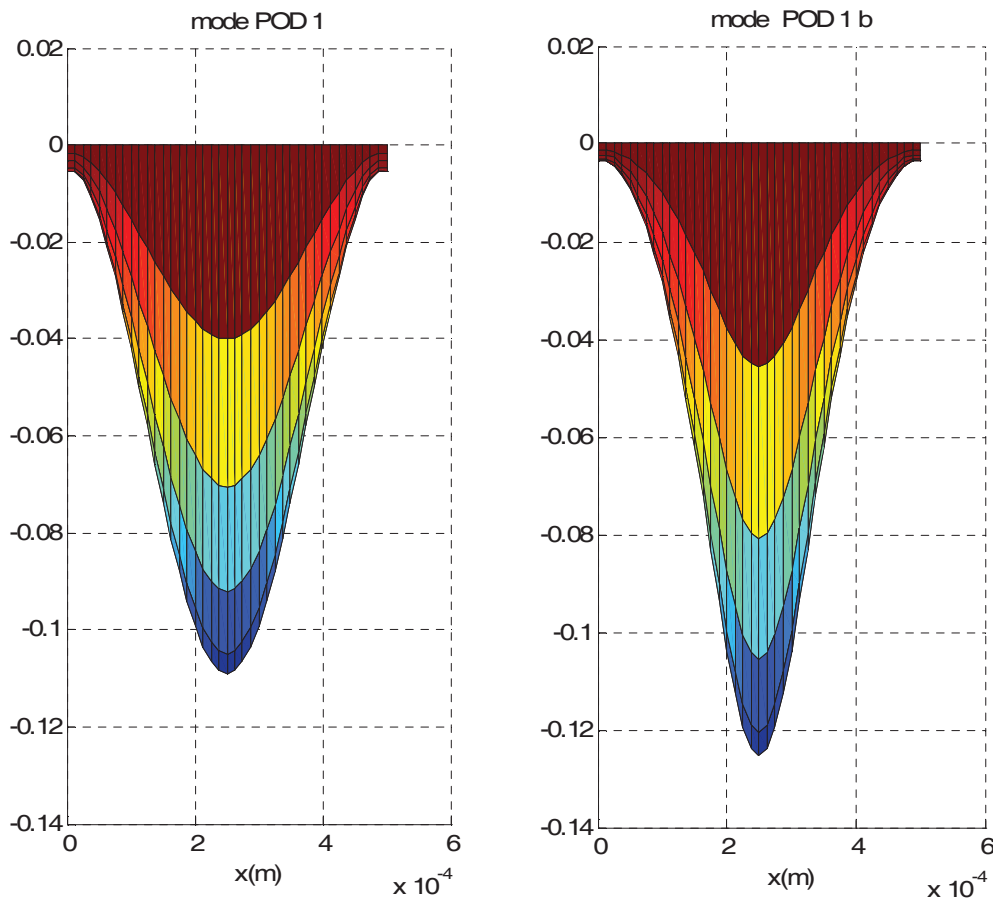


**Figure 2-19** Deux premiers modes de pression issus de la décomposition propre orthogonale de 41 instantanés issus de la simulation du système linéaire représentant l'équation de Reynolds linéarisée.

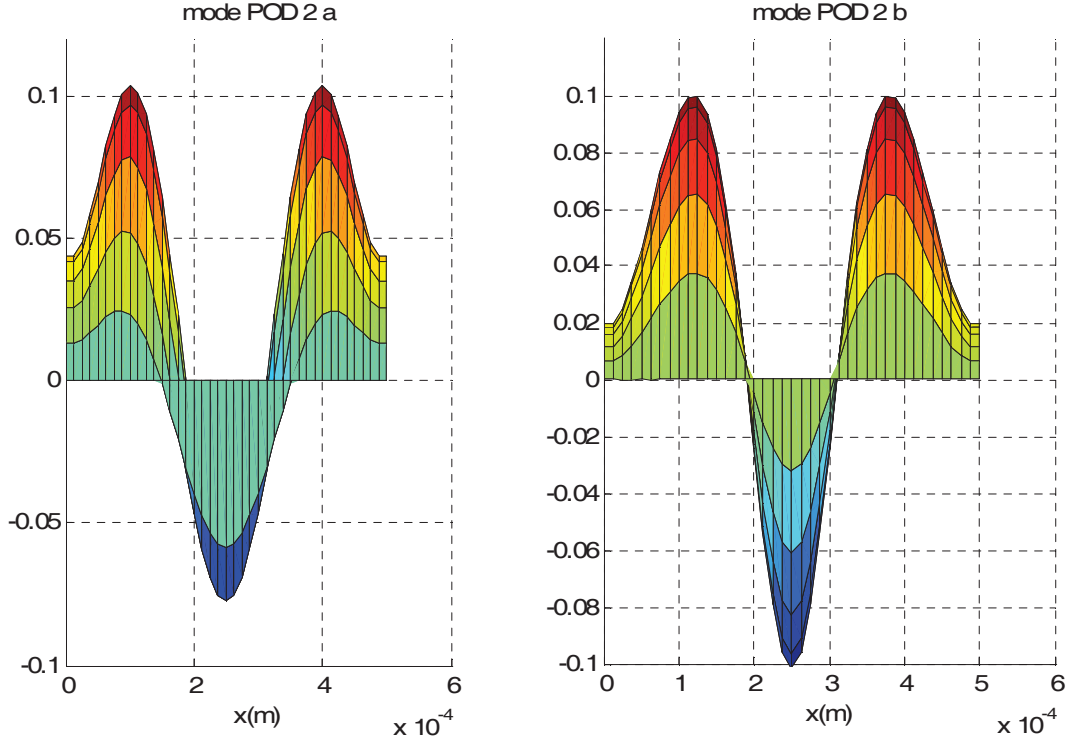


**Figure 2-20** Deux premiers modes de pression issus d'une décomposition propre orthogonale de 41 instantanés issus de la simulation du système non-linéaire.

Pour illustrer la sensibilité de la forme des modes POD au choix de la trajectoire d'apprentissage, on applique la même démarche pour une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa, une amplitude du déplacement de la moitié de l'écart initial au substrat et une fréquence de 50 kHz, ce seulement pour la simulation du système non-linéaire. Le premier mode POD concentre 98.92 % de l'énergie du système, les deux premiers 99.98%. Les profils selon la largeur sont à peu près les mêmes que dans le premier cas étudié, ils changent selon la longueur. Les figures 2-21 et 2-22 présentent ces profils pour les deux premiers modes POD pour les deux cas étudiés. On vérifie bien que la base déterminée dans le cas non-linéaire dépend fortement de la trajectoire d'apprentissage. On vérifie que c'est aussi le cas pour une simulation du système linéaire.



**Figure 2-21** Comparaison des profils selon la longueur du premier mode POD issu de différentes simulations.



**Figure 2-22** Comparaison des profils selon la longueur du deuxième mode POD issu de différentes simulations.

### 2.5.3.2. Résultats : système linéaire /système non-linéaire

On applique la méthode de Galerkin au modèle non-linéaire version 1 (2-54) pour deux bases : les modes POD issus de la simulation du système linéaire et non-linéaire dans le premier cas décrit au paragraphe précédent ( $P_0 = 1.013 \cdot 10^4$  Pa,  $\alpha = 0.2$ ,  $f = 50$  kHz ). La situation étudiée est la même que celle de l'extraction des bases. Dans ce paragraphe et ceux qui suivent les erreurs sont déterminées sur la pression au point milieu et sont l'erreur maximum instantanée. En termes de convergence, on a une solution à 2% près pour deux modes dans les deux cas (si on ajoute un autre mode l'erreur entre les deux solutions est de moins de 2%). On retient donc les résultats pour deux modes. La solution pour la base extraite du système non-linéaire présente 8.5% d'erreur alors que la solution pour la base extraite du système linéaire présente 2% d'erreur par rapport à la solution du modèle différences finies non linéaire. Dans ce cas la base issue d'une simulation du système linéaire présente de meilleurs résultats.

On effectue exactement la même démarche mais pour le deuxième cas ( $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.5$ ,  $f = 50$  kHz ). Les deux bases sont extraites à partir de simulations avec ces paramètres. La simulation de l'équation Version 1 (2-54) se fait aussi avec ces derniers. En termes de convergence, on a une solution à 1% près pour 2 modes POD retenus dans les deux cas. La solution pour la base extraite du système linéaire présente une erreur de 20% alors que la

solution pour la base extraite du système non-linéaire présente une erreur de 8.5%. Ce cas s'éloigne plus du cas linéaire que le précédent et on se rend compte qu'il est alors très pertinent d'extraire une base à partir de la simulation du système non-linéaire. Dans ce cas une base issue de la décomposition propre orthogonale prend tout son sens.

### **2.5.3.3. Changement de paramètres : pression ambiante, amplitude, fréquence.**

On travaille maintenant sur le deuxième cas pour lequel on a extrait des modes POD ( $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.5$ ,  $f=50\text{kHz}$ ). On applique la méthode de Galerkin au modèle version 1 (2-61) pour deux bases : les modes POD issus de cette même trajectoire et les modes POD issus de la trajectoire précédente ( $P_0 = 1.013 \cdot 10^4$  Pa,  $\alpha = 0.2$ ,  $f=50\text{kHz}$ ) du système non-linéaire

Pour les deux bases choisies il faut 2 modes pour atteindre la précision sur la solution voulue (c'est-à-dire moins de 5% d'erreur si on ajoute un mode), et l'erreur pour deux modes est respectivement de 9 % pour la base issue de la même simulation, et de 8% pour celle issue de la simulation précédente. On remarque toutefois que pour la base issue de la même simulation, l'erreur pour 1 mode est de 8 % alors qu'elle est de 18% pour la base précédente pour laquelle la convergence est toutefois rapide puisqu'au final deux modes suffisent. La première base extraite s'avère donc valable pour une simulation à une pression ambiante différente, et où les non-linéarités sont plus importantes du fait du plus grand déplacement. L'inverse est vrai aussi, on peut utiliser la dernière base extraite pour la simulation précédente. De même la convergence est rapide et la précision par rapport au modèle différences finies bonne.

### **2.5.3.4. Changement de géométrie.**

De même, on constate que les modes POD restent valides même en changeant les paramètres géométriques par rapport à la simulation d'extraction des modes (longueur, largeur, entrefer, etc...) avec toutefois la contrainte de prendre plus de modes en compte.

## 2.5.4. Comparaison des différentes bases de projection

### 2.5.4.1. Approximation du système linéaire

#### *a. Approximation dans le domaine fréquentiel*

On s'intéresse au système linéaire (2-61) associé à l'équation d'observation suivante :

$$p_{\text{milieu}} = \mathbf{C}^T \mathbf{p} \quad (2-63)$$

où la variable observée est la variation de pression au milieu de la poutre. Un seul mode mécanique est retenu pour l'excitation : la variable d'entrée est la coordonnée modale vitesse.

Le système est SISO (Single Input Single Output). On applique la transformée de Laplace à (2-61) et (2-63) et on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \mathbf{C}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (2-64)$$

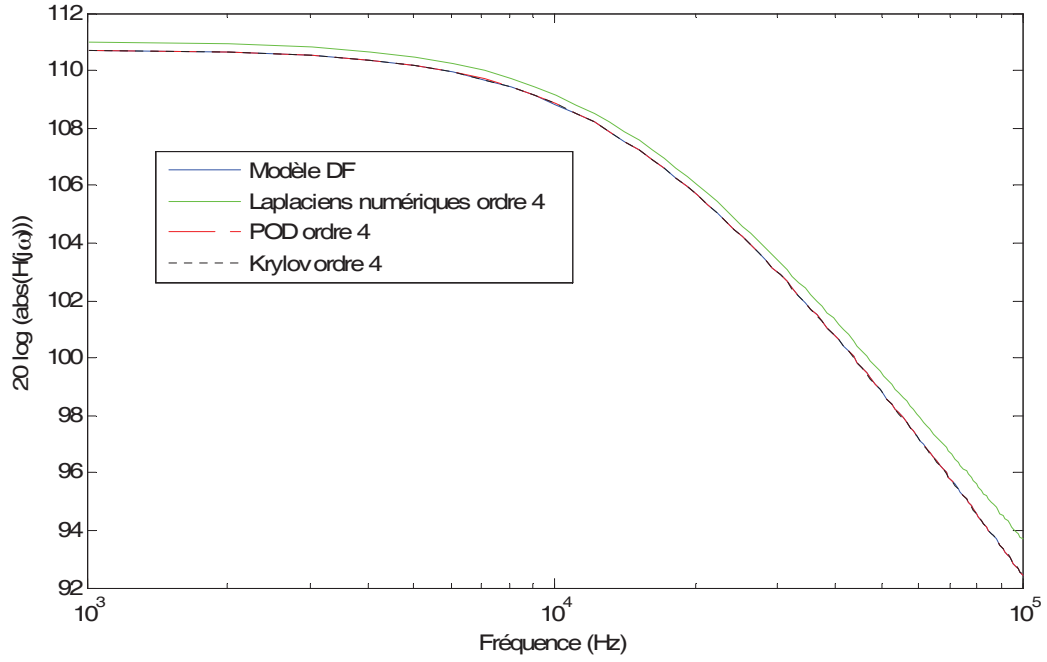
En projetant le système sur une base réduite, les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  deviennent  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{C}_r$  (cf §1.2) et la fonction de transfert du modèle réduit est alors :

$$H_r(s) = \mathbf{C}_r^T (s\mathbf{I}_r - \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{B}_r \quad (2-65)$$

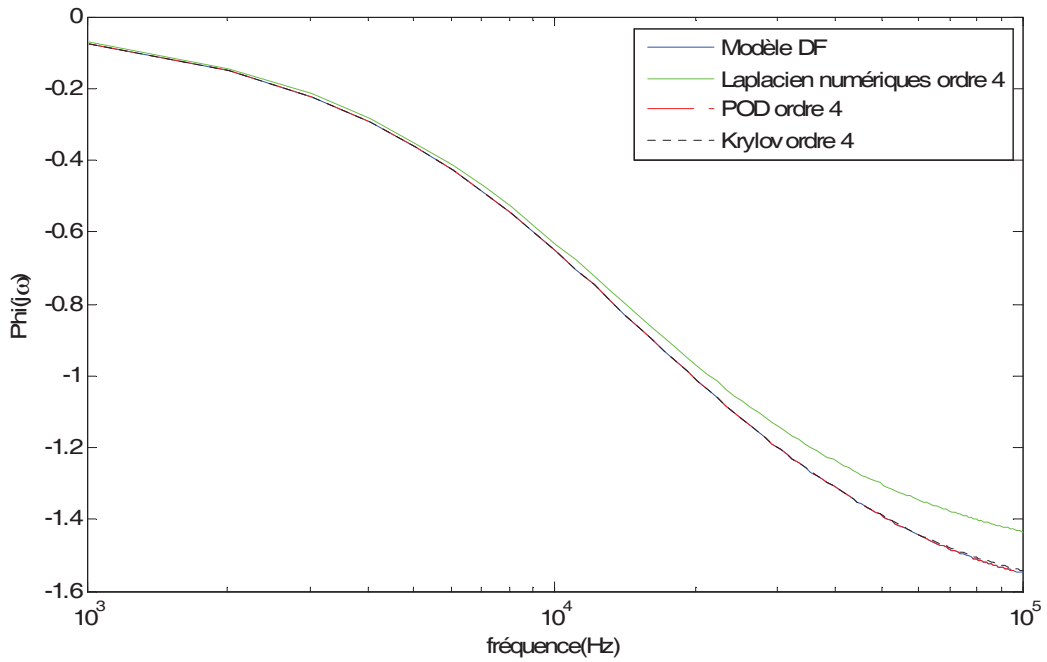
La base de Krylov est explicitement construite pour obtenir une bonne approximation de la fonction de transfert autour d'une certaine fréquence, ce n'est pas le cas des modes issus de la décomposition propre orthogonale. Pour les modes propres du Laplacien, il s'agit aussi d'une approximation de la fonction de transfert autour des fréquences propres des modes propres.

On représente sur les figures 2-23 et 2-24 le gain et la phase des fonctions de transfert des différents modèles réduits sur une plage de fréquence [0 100kHz] pour la poutre décrite précédemment ( $L=500 \mu\text{m}$ ,  $W=70 \mu\text{m}$ ,  $h=2 \mu\text{m}$ ,  $G_0=3 \mu\text{m}$ ) à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ( $f_c=13.4 \text{ kHz}$ ), la base POD ayant été générée avec  $\alpha = 0.05$  et  $f=50 \text{ kHz}$ . On obtient une excellente approximation de la fonction de transfert sur la plage désirée avec la base de Krylov et la base issue de la décomposition propre orthogonale d'instantanés issus de la simulation du système linéaire. Les modes propres du Laplacien ne donnent pas un résultat parfait.





**Figure 2-23** Gain de la fonction de transfert à une pression ambiante de  $P_0=1.013 \times 10^3$  Pa.



**Figure 2-24** Phase de la fonction de transfert à pression ambiante  $P_0=1.013 \times 10^3$  Pa.

### ***b. Approximation dans le domaine temporel***

On excite la poutre sinusoïdalement avec les paramètres suivants :  $P_0 = 1.013 \times 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.05$ ,  $f=50$  kHz et relève la valeur de la pression au point milieu pour le modèle original et les différents modèles projetés. La base POD est extraite avec les mêmes paramètres. Pour

un ordre du modèle réduit de 2, les bases de Krylov et POD donnent des résultats parfaits, alors que les modes propres du Laplacien donnent une solution entachée d'erreur (5%). Les résultats s'améliorent toutefois quand on augmente l'ordre du modèle réduit.

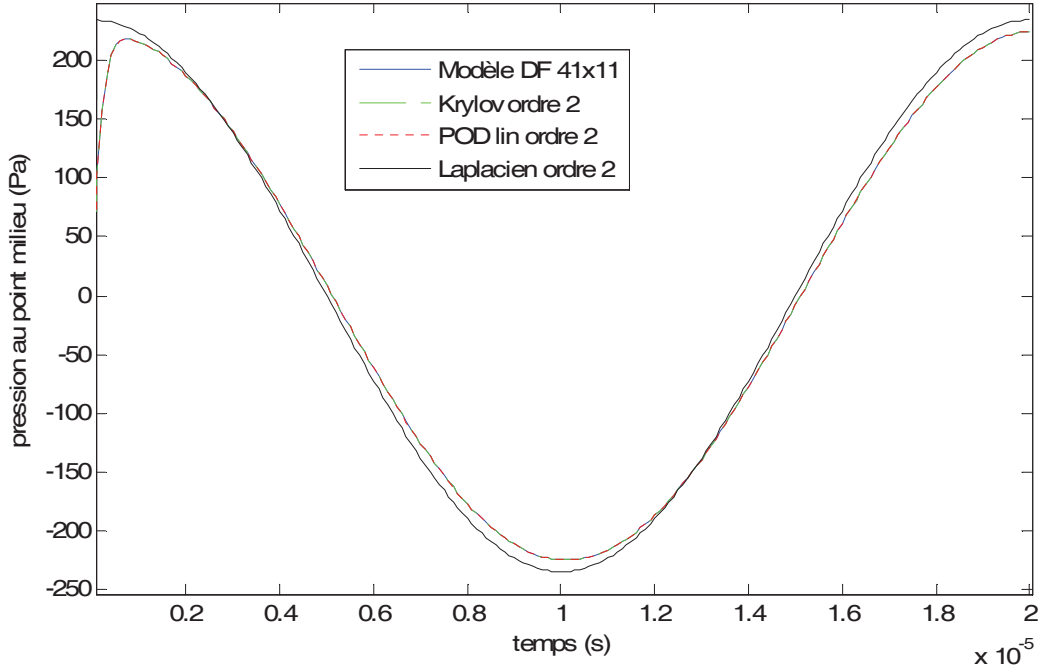


Figure 2-25 Réponse dans le temps pour trois bases différentes : Krylov, POD modes propres du Laplacien.

#### 2.5.4.2. Approximation du système non-linéaire

On rappelle les différentes versions de l'équation étudiée. On ajoute aux trois versions de l'équation étudiées (2-54, 2-55, 2-56), l'équation de Reynolds sans hypothèses particulières étudiée dans [Hung 1999].

$$\bar{\nabla} \left( \frac{G^3}{12\mu} P \bar{\nabla} P \right) = \frac{\partial GP}{\partial t} \quad (2-66) \text{ (Hung et al.)}$$

Les paramètres géométriques de la poutre sont toujours les mêmes ( $L=500 \mu\text{m}$ ,  $W=70 \mu\text{m}$ ,  $G_0=3 \mu\text{m}$ ). On impose  $P_0 = 1.013 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ ,  $\alpha = 0.2$  et  $f=50 \text{ kHz}$ .

On applique la méthode de Galerkin sur les différentes versions de l'équation de Reynolds en utilisant successivement :

- les modes propres du Laplacien. Ces modes ont une expression analytique et ne dépendent aucunement d'une trajectoire d'apprentissage.

- les modes de Krylov qu'on extrait de la structure du modèle différences finies associé à l'équation de Reynolds linéaire. De même, ils ne dépendent pas d'une trajectoire d'apprentissage.
- les modes POD issus d'une série d'instantanés d'une simulation du système non-linéaire différences finies issu de (2-51). Ces modes dépendent d'une simulation d'apprentissage, dont les paramètres sont :  $P_0 = 1.013 \cdot 10^4$  Pa,  $\alpha = 0.2$ ,  $f=50\text{kHz}$ .

Pour la version 3 avec le changement de variable, les modes POD utilisés sont déterminés sur la nouvelle variable  $\varphi$ . Les erreurs correspondent à l'erreur maximum sur la pression instantanée au point milieu dans chaque cas précis. Le tableau 2-2 contient l'information sur le nombre de modes à utiliser pour une erreur maximum de 5% par rapport à une solution de référence prenant en compte 25 modes. La précision par rapport au code différences finies est l'erreur de cette solution de référence. Pour pouvoir évaluer le modèle de [Hung 1999] un modèle différences finies sans l'hypothèse des petites variations de pression a été codé.

**Tableau 2-2** Résultats pour différentes versions de l'équation et pour différentes bases de projection.

	Version 1			Version 2			Version 3		
	Laplacien	Krylov	POD	Laplacien	Krylov	POD	Laplacien	Krylov	POD
Convergence à 5% près	3 x 1 modes	4 modes	1 mode	2 x 1 modes	1 mode	1 modes	2 x 1 modes	Pas pertinent	1 mode
Précision par rapport au modèle DF	4%	4%	2%	3%	0.1%	0.3%	2%	Pas pertinent	2%

	Hung <i>et al.</i>		
	Laplacien	Krylov	POD
Convergence à 5% près	2 x 1 modes	3 modes	3 modes
Précision par rapport au modèle DF	10%	9%	7%

On constate que la forme des équations de la version 2 et 3 assure effectivement une convergence plus rapide de la solution pour une base constituée des modes propres du Laplacien que la forme initiale qui correspond à l'équation version 1. On remarque que les modes propres du Laplacien constituent une bonne base pour le modèle de [Hung 1999] puisque seul deux modes sont nécessaires pour une convergence à 5 % près. Les erreurs sont

toutefois de l'ordre de 10% pour les trois bases alors que les erreurs pour les trois autres modèles restent inférieures à 5%. On rappelle toutefois que l'hypothèse des petites variations de pression n'a pas été faite pour ce modèle. On ne compare donc pas exactement les mêmes choses. On peut conclure qu'il est plus difficile d'obtenir un modèle précis par la méthode de Galerkin de l'équation (2-66) que de l'équation (2-37) modifiée ou non.

Pour les trois premières versions de l'équation de Reynolds étudiées, la projection sur les modes POD est plus performante que la projection sur les modes du Laplacien. Selon le modèle, il faut plus ou moins de modes de Krylov que de modes propres du Laplacien pour atteindre une précision donnée.

Les erreurs sur la pression au point milieu par rapport au modèle différences finies restent inférieures à 5% pour les modèles avec l'hypothèse des petites variations de pression. La meilleure précision est atteinte pour le modèle version 2 avec comme base les modes de Krylov, elle est de 0.1%.

On réalise maintenant une série de simulation pour la version 1 de l'équation avec les paramètres suivants :  $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.5$ ,  $f=50$  kHz. On obtient les résultats présentés au tableau 2-3.

**Tableau 2-3** Résultats pour l'équation version 1 pour un cas fortement non-linéaire

	Version 1		
	Laplacien	Krylov	POD
Convergence à 5% près	3 x 3 modes	9 modes	2 modes
Précision par rapport au modèle DF	6%	7%	4%

On constate que la base POD se révèle alors plus pertinente que les modes propres du Laplacien et la base de Krylov alors même qu'elle a été extraite pour d'autres paramètres ( $P_0 = 1.013 \cdot 10^4$  Pa,  $\alpha = 0.2$ ,  $f=50$  kHz). Ainsi dans un cas plus fortement non-linéaire, l'intérêt de la base POD prend tout son sens malgré un surcoût à la construction dû à une simulation nécessaire du modèle non-linéaire. Au prix d'une augmentation du nombre de modes à utiliser et donc du coût d'évaluation du modèle, les modes propres du Laplacien et la base de Krylov restent une solution pertinente.

## **2.6. Conclusion générale**

On a dans ce chapitre traité de la résolution de l'équation de Reynolds linéaire et non-linéaire. Après avoir résumé les contributions de la littérature sur ces points, nous avons proposé une résolution de l'équation linéaire dans le but d'une étude de la réponse fréquentielle. Dans un deuxième temps, il a s'agit d'étudier l'équation de Reynolds non-linéaire avec toutefois l'hypothèse des petites variations de pressions. Un changement de variable sur la pression a été proposé afin de donner à l'équation une forme se prêtant plus à l'utilisation des modes propres du Laplacien comme fonctions de bases. Enfin, on a étudié la validité de trois bases différentes : les modes propres du Laplacien, une base de Krylov et une base issue d'une décomposition propre orthogonale. La réponse fréquentielle ainsi que la réponse dans le temps des modèles réduits du système linéaire a été étudiée. La validité des bases a aussi été étudiée pour la réponse dans le temps de l'équation non-linéaire.

Pour le système linéaire, une projection sur une base de Krylov ou une base POD se sont révélés rendre parfaitement compte du comportement fréquentiel sur une certaine plage.

On a pu constater la pertinence de l'utilisation d'une base POD dans un cadre fortement non-linéaire. Les modes POD présentent toutefois l'inconvénient de dépendre d'une trajectoire d'apprentissage. On a étudié brièvement la validité d'une base extraite d'une simulation particulière sur d'autres simulations et les résultats se sont révélés concluants. Une base POD s'est même révélée réutilisable pour d'autres paramètres géométriques.

La base de Krylov qui elle est extraite à partir des la structure du modèle linéaire se trouve être aussi pertinente que les modes propres du Laplacien avec toutefois, dans les deux cas, un surcoût quant aux nombres de modes à utiliser par rapport à une base POD. Ces deux bases présentent l'avantage de ne pas dépendre d'une trajectoire d'apprentissage, ce qui réduit le coût de construction du modèle et augmente la robustesse du modèle réduit obtenu.

Ainsi dans un cas faiblement non-linéaire, on préconisera l'utilisation d'une base de Krylov ou des modes propres du système linéaire (§1.2.1). Dans un cas plus fortement non-linéaire, un compromis est à trouver entre le coût de construction du modèle important dans le cas d'une base POD, et le coût d'évaluation du modèle plus important dans le cas de bases issues du système linéaire.

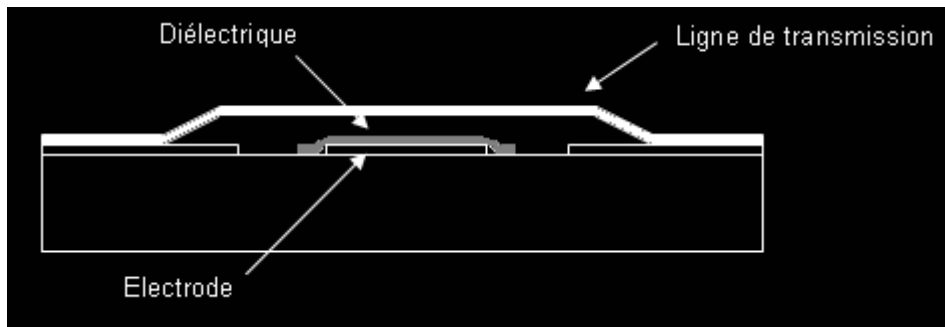
## **Chapitre 3      Réduction d'ordre de modèle d'un système couplé**

On présente le principe de fonctionnement d'un micro-interrupteur actionné électrostatiquement. En effet le comportement de ce type de système est fortement influencé par l'amortissement d'un film d'air comprimé, phénomène traité dans le chapitre précédent. On décrira aussi les autres phénomènes physiques en jeu dans la modélisation de ce type de système. On fera un état de l'art de la résolution de ce problème couplé pour s'intéresser ensuite plus particulièrement aux modèles réduits de micro-interrupteurs. On établira un modèle réduit couplé en incluant le modèle de l'équation de Reynolds avec changement de variable établi dans le chapitre 2. Ce modèle couplé servira à la simulation de l'effondrement d'un micro-interrupteur. Pour valider ce modèle, on se référera à un modèle différences finies, ainsi qu'à des résultats de la littérature.

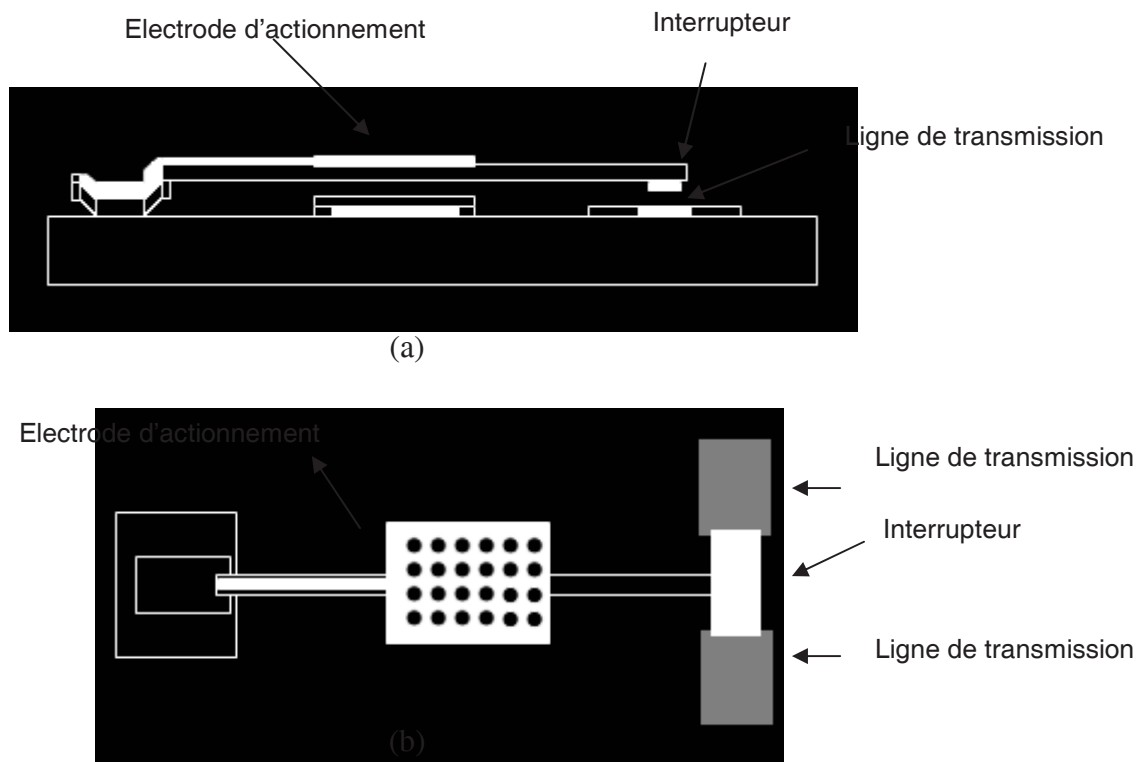
### **3.1.    *Micro-interrupteur MEMS***

#### **3.1.1. Principe de fonctionnement**

On se place ici dans le cadre d'applications radiofréquence (RF). Un micro-interrupteur peut servir par exemple à sélectionner le mode émission ou réception d'une antenne. Les différents modes d'actionnement d'un micro-interrupteur MEMS sont électrostatiques, thermiques, magnétostatiques, et piézoélectriques. On s'intéresse ici aux micro-interrupteurs actionnés électrostatiquement. Il existe deux principes de fonctionnement pour ces micro-interrupteurs MEMS : le contact capacitif et le contact ohmique. Dans le cas d'un contact capacitif, les électrodes d'actionnement et de transmission sont les mêmes (Figure 3-1). A son état de repos l'interrupteur correspond à une certaine capacité. Actionné, il vient coller à un diélectrique au dessus de la ligne de transmission, la capacité correspondante devient alors très grande. Dans le cas du contact ohmique, l'électrode d'actionnement est différente de celle établissant le contact au niveau de la ligne de transmission (Figure 3-2). L'interrupteur à contact capacitif fonctionne mieux pour les hautes fréquences 5-100 GHz alors que l'interrupteur à contact ohmique est plus efficace entre 0.1 et 40 GHz.



**Figure 3-1** Micro-interrupteur à contact capacitif.



**Figure 3-2** Micro-interrupteur à contact ohmique. (a) vue de côté (b) vue de dessus

Les interrupteurs en technologie semi-conducteurs sont traditionnellement constitués de transistors ou diodes PIN. Les avantages principaux d'un interrupteur MEMS par rapport à la technologie traditionnelle sont une faible consommation, une bonne linéarité du composant, de faibles pertes d'insertions et une meilleure isolation à l'état ouvert. Pour un micro-interrupteur à contact ohmique, des problèmes de fiabilité sont à relier au contact métal-métal au niveau de la ligne de transmission alors que pour un micro-interrupteur à contact capacitif ils sont dus au chargement du diélectrique. Des progrès sont aussi à faire concernant la puissance que peut supporter ce type de système.

Les caractéristiques temps de commutation, tension de commutation sont à optimiser. On est en présence d'un problème électromécanique associé un problème fluide si le micro-interrupteur n'est pas conditionné dans le vide. Ainsi des outils de simulations de ce problème multi-physique sont nécessaires à la conception de ces micro-interrupteurs.

### 3.1.2. Physique d'un micro-interrupteur actionné de manière électrostatique

On se place dans le cas du micro-interrupteur du type de la figure 3-1 constitué d'une poutre encastrée aux deux bouts. On suppose la longueur de la poutre grande devant ses deux autres dimensions. Les phénomènes étant non-linéaires, on ne peut ramener ce type de système à un simple modèle masse-ressort-amortisseur. La partie mécanique est modélisée par l'équation d'Euler-Bernoulli en grand déplacement. Le phénomène d'amortissement est régi par l'équation de Reynolds dont la résolution est traitée dans le chapitre 2. Pour la partie électrostatique l'approximation des capacités planes est faite.

#### 3.1.2.1. Mécanique

##### -Equation d'Euler-Bernoulli

L'axe  $Ox$  est défini selon la longueur de la poutre. La relation entre sa déformation et la force qui lui est appliquée est en général déterminée par l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (S + S_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F_{ext} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-1a)$$

$$S = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3-1b)$$

où  $w$  est le déplacement vertical de la poutre,  $I$  son moment d'inertie,  $S_0$  la tension résiduelle,  $S$  la force axiale due à l'élongation,  $A$  l'aire de la section de la poutre,  $E$  le module d'Young et  $\rho$  la masse volumique du matériau. Cette équation est établie en annexe B.

Le terme  $S$  (3-1b), correspondant à la force axiale due à l'élongation de la poutre ne devient important que quand les déplacements verticaux sont de l'ordre de l'épaisseur de la poutre.

Si le rapport largeur sur longueur est trop important (typiquement, supérieur à 1/10), l'approximation « poutre » n'est plus valable, il faut considérer une plaque. Toutefois avec l'hypothèse d'un déplacement constant sur la largeur, l'équation des plaques peut être



approximée par l'équation des poutres en changeant le module d'Young  $E$  dans (3-1a) en  $E'$  (3-1c),  $\nu$  étant le coefficient de Poisson [Younis 2003].

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (3-1c)$$

#### **-Pertes mécaniques**

Il peut être utile de tenir compte des pertes mécaniques au niveau des points d'ancrage. En particulier, dans le cas d'un environnement très basse pression, ce sera la cause principale des pertes du système. Elles sont notamment mentionnées comme source d'erreur du modèle [Hung 1999].

#### **-Contact**

[McCarthy 2002] présente un modèle pour un micro-interrupteur constitué d'une poutre encastrée-libre (Fig.1-3). Le contact se fait seulement au bout de la poutre. La poutre ne colle pas immédiatement, il y a un phénomène de rebondissement, qui est modélisé par une raideur supplémentaire. Dans le cadre de cette thèse on étudie une poutre encastrée-encastrée pour laquelle on négligera ce phénomène.

### **3.1.2.2. Actionnement électrostatique**

#### **-Force électrostatique**

L'équation à résoudre pour le problème électrostatique est l'équation de Poisson :

$$\Delta V = 0. \quad (3-2)$$

associée aux conditions limites définissant le potentiel au niveau des électrodes d'actionnement. On fait en général l'approximation des capacités planes, les sections restant parallèles. L'expression de l'énergie électrostatique par unité de longueur est alors la suivante :

$$U_{elec}(x) = \frac{1}{2} C(x) V^2 \quad (3-3a)$$

$$C(x) = \epsilon_0 W \frac{1}{G(x)} \quad , (3-3b)$$

$C(x)$  la capacité par unité de longueur,  $G(x)$  est l'écart entre la poutre et le substrat,  $W$  la largeur de la poutre,  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide.

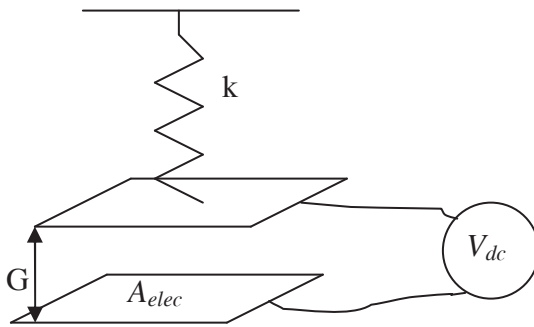
La force électrique par unité de longueur a alors l'expression suivante :

$$F_{elec}(x) = \frac{\epsilon_0 W V^2}{2} \frac{1}{G(x)^2} \quad (3-4)$$

Cette approximation ne prend pas en compte les effets de bords. Ces derniers ont deux causes : l'épaisseur de la plaque étant non nulle, il existe un champ électrique entre les bords latéraux et le substrat, et si les dimensions latérales de la plaque ne sont pas assez importantes devant la distance au substrat, le champ entre les bords du dessus de la plaque et le substrat n'est plus négligeable.

### -Phénomène de pull-in/pull-out

Le comportement des structures actionnées de manière électrostatique est caractérisé par une instabilité statique. Au-delà d'un certain déplacement vers le substrat, l'équilibre entre la force de rappel mécanique et la force d'actionnement électrostatique devient instable et la poutre se colle brusquement au substrat : c'est le phénomène de « pull-in ». Dans le cas d'une structure simplifiée constituée de deux électrodes, l'une fixe, l'une mobile suspendue à un ressort de raideur  $k$ .



**Figure 3-3** Structure électromécanique simplifiée.

L'instabilité se produit à une distance égale au tiers de la distance initiale entre les deux électrodes. La tension correspondante, dite tension de « pull-in » ou tension d'effondrement, s'écrit alors :

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{8kG_0^3}{27\epsilon_0 A_{elec}}} \quad (3-5)$$

$A_{elec}$  est l'aire de la capacité,  $G_0$  est l'écart initial entre les deux électrodes

En pratique, on traite le cas d'une poutre pour laquelle il est alors plus compliqué de trouver une expression analytique de la tension d'effondrement. [Pamidighantam 2002] propose une

expression prenant en compte les effets de bords, la contrainte résiduelle, et les grands déplacements de la poutre.

Une autre caractéristique importante d'un micro-interrupteur est la tension de rétablissement  $V_{po}$  ou tension de « pull-out ». Cette tension correspond à la tension à laquelle il faut redescendre pour décoller la poutre du substrat [Gretillat 1995]. Ainsi un micro-interrupteur sera souvent soumis à une tension de biais statique comprise entre  $V_{pi}$  et  $V_{po}$  de manière à accélérer son actionnement [Gretillat 1995]..

### 3.1.2.3. Phénomènes électrothermiques

[Yang 2004] inclut dans son modèle les phénomènes électrothermiques dans le cas où une source de tension supplémentaire est connectée entre les deux extrémités de la poutre. Le courant traversant la poutre est source de chaleur par effet Joule, ce qui modifie la contrainte dans la poutre. Ces effets sont modélisés par l'équation linéaire suivante.

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3-6)$$

où  $\dot{q} = \gamma E^2$

est la source volumique de chaleur avec  $\gamma$  la conductivité électrique et  $E$  le champ électrique.

$\rho$  est la densité du matériau,  $C_p$  sa capacité calorifique et  $k$ , sa conductivité thermique. Un terme d'expansion thermique est inclus dans l'équation d'Euler-Bernoulli, de même nature que la contrainte résiduelle ou la force axiale due à l'élongation. Dans le cas étudié, il n'y aura pas de source de tension supplémentaire, ce phénomène ne sera pas pris en compte.

### 3.1.2.4. Amortissement

Le phénomène d'amortissement ayant lieu dans la configuration de la figure 3-1 est appelé dans la littérature « squeeze film damping ». Il est modélisé par l'équation de Reynolds qui a fait l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre précédent.

### 3.1.3. Réponse fréquentielle du système couplé

#### 3.1.3.1. Modèles de la littérature

On a vu dans le § 2.1.3 que [Younis 2004] linéarise l'équation de Reynolds pour un déplacement statique donnée de la poutre pour déterminer les modes propres de pression comme des fonctions des modes propres du déplacement. Il utilise ces expressions dans les équations de Von Karman linéarisées. Par une méthode éléments finis, il résout le problème aux valeurs propres résultant pour en dégager le facteur de qualité et la fréquence de résonance principale de la structure actionnée électrostatiquement.

[Li 2007] applique la méthode de Galerkin à l'équation de Reynolds linéarisée autour d'un point de fonctionnement et en déduit la réponse fréquentielle de coordonnées modales de pression. Il utilise ces expressions dans l'équation d'Euler-Bernoulli également linéarisée pour déterminer la réponse fréquentielle de la structure actionnée électrostatiquement. Par identification, il obtient le facteur de qualité et la fréquence de résonance de la structure.

#### 3.1.3.2. Réponse fréquentielle du système couplé

On va maintenant chercher à comprendre l'influence que ce phénomène peut avoir sur un système couplé fluide-structure du type du micro-interrupteur de la figure 3-1 soumis à une force uniforme. On observe la réponse fréquentielle de ce type de système soumis à une force uniforme sinusoïdale. On rappelle l'expression des grandeurs caractéristiques  $f_c$ , pulsation de coupure de l'amortissement du film d'air comprimé et  $f_m$ , pulsation propre mécanique.

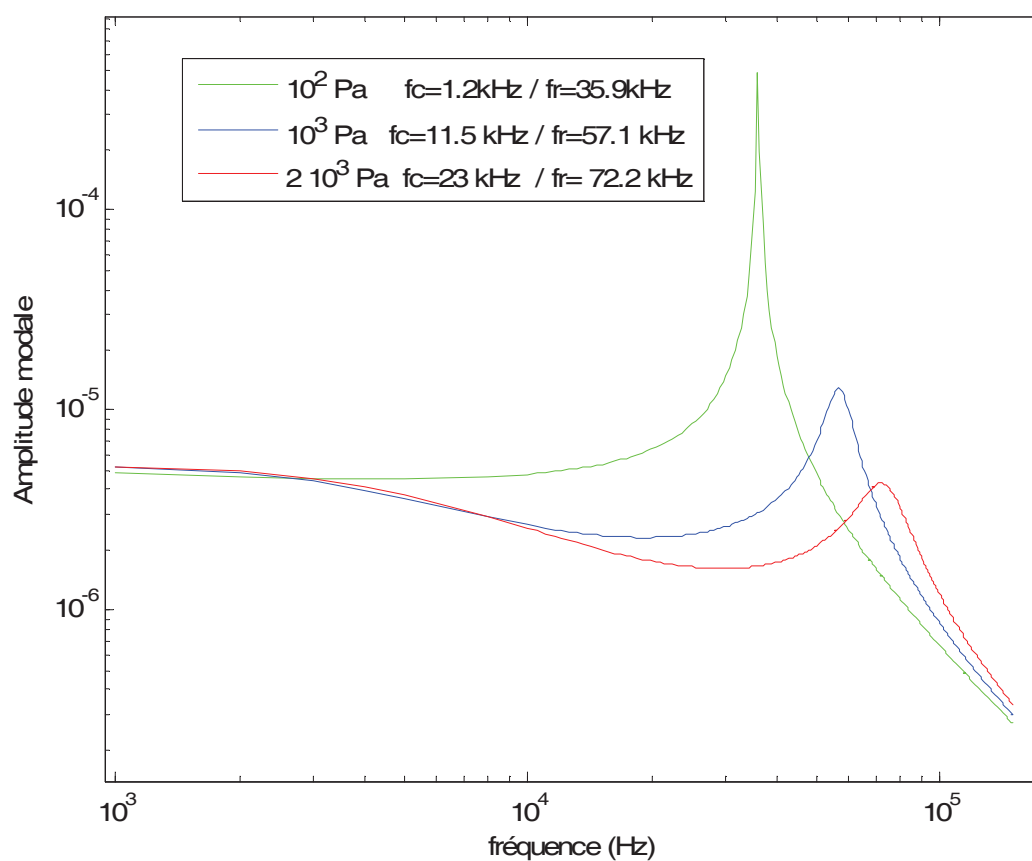
$$f_c \approx \frac{1}{2\pi} \frac{G_0^2 P_0 \pi^2}{12\mu W^2} \quad (3-7)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \quad (3-8)$$

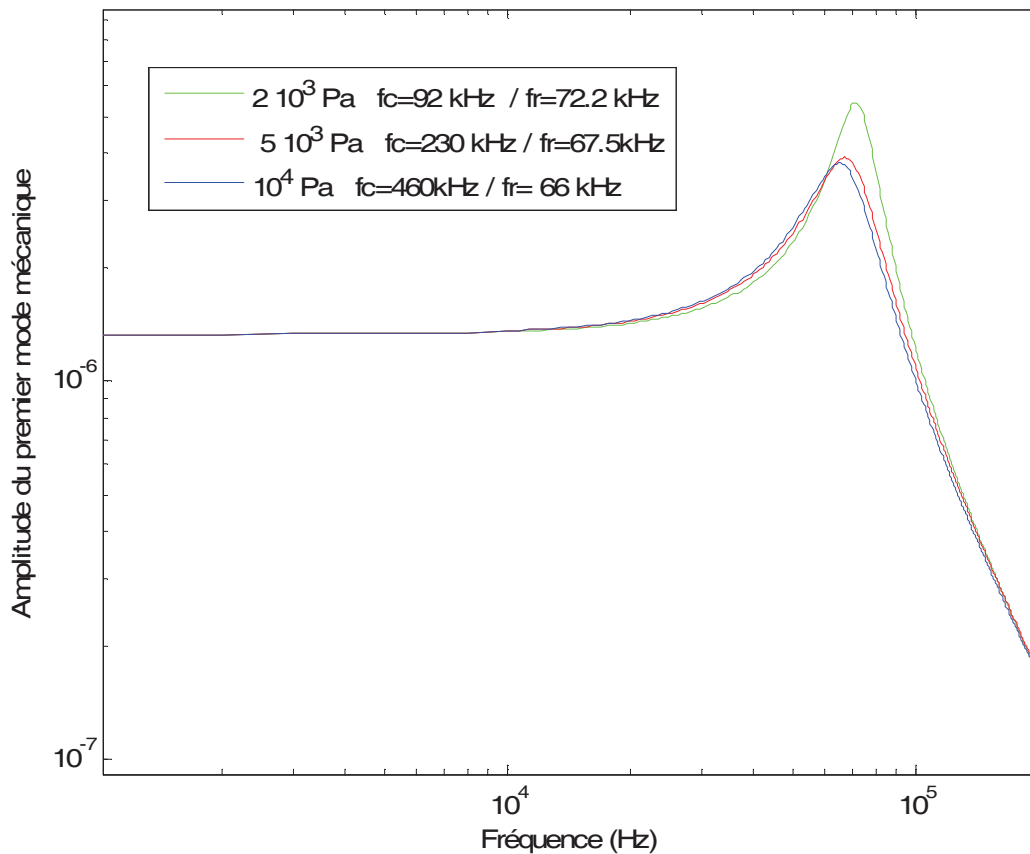
Où  $\lambda$ , la première valeur propre de l'opérateur spatial de l'équation d'Euler-Bernoulli à une dimension (3-1a).

Le système mécanique se comporte comme un système du deuxième ordre. La comparaison de  $f_m$  et  $f_c$  permet d'évaluer l'importance du film d'air sur la dynamique du système. [Bao 2007] met en évidence trois cas principaux :

- $f_c \approx f_m$ . L'amortissement visqueux et l'effet de raideur influent tous deux sur la dynamique. Les courbes bleue et rouge de la figure 3-4 illustrent ce cas pour un système mécanique de fréquence propre  $f_m = 32.9$  kHz. A l'approche de  $f_c$  la raideur globale augmentant, le gain diminue. On observe aussi que le décalage de la fréquence de résonance et la baisse du facteur de qualité sont d'autant plus importants que la pression ambiante est grande. Les fréquences de résonance (celles pour lesquelles le gain est maximal) sont notées  $f_r$ .
- $f_c \ll f_m$ . L'effet de raideur du film est dominant. Toutefois, la raideur du système mécanique est en général beaucoup plus importante que celle du film d'air. Celui-ci n'a donc que peu d'influence sur le gain du système complet. Néanmoins, un décalage de la fréquence de résonance est en général observable. Ce fait est illustré par la courbe verte de la figure 3-4. On constate en effet une faible baisse du gain mais un décalage de 3 kHz de la fréquence de résonance.
- $f_c \gg f_m$ . Sur la bande de fréquence intéressante ( $f < f_m$ ), l'amortissement visqueux est dominant. On observe ce phénomène sur la figure 3-5 pour des pressions ambiantes de  $5 \times 10^3$  et  $10^4$  Pa. En abaissant la pression à  $2 \times 10^3$  Pa, les composantes raideur et amortissement commencent à avoir des importances comparables, un décalage de la fréquence de résonance est observable.



**Figure 3-4** Réponse fréquentielle à différentes pressions ambiantes du premier mode d'une poutre encastrée - encastrée de fréquence propre  $f_m = 32.9 kHz$  soumise à une excitation sinusoïdale uniforme.



**Figure 3-5** Réponse fréquentielle à différentes pressions ambiantes du premier mode d’une poutre encastrée-encastrée de fréquence propre  $f_0 = 65.7 \text{ kHz}$  soumise à une excitation sinusoïdale uniforme.

Ainsi, à l’aide de quelques paramètres  $f_m$  et  $f_c$  on peut évaluer qualitativement l’influence de l’amortissement du film d’air sur la dynamique du système couplé fluide-structure.

### 3.1.4. Modèles réduits de micro-interrupteur

#### 3.1.4.1. Modèle de [Gabbay 1998] / [Mehner 2000]

##### *a. Principe général*

[Gabbay 1998] et [Mehner 2000] proposent une approche basée sur le découplage des domaines pour la construction du modèle réduit. Des fonctions d’approximation des énergies électrostatique, mécanique et cinétique sont déterminées par des séries de simulations uni-domaines. Un circuit équivalent du phénomène d’amortissement d’un film d’air comprimé est établi, les valeurs des composants dépendant de l’amplitude du déplacement. Cette méthode a été implémentée dans ANSYS sous la forme d’éléments particuliers (ROM144 pour les

parties électrostatiques et mécaniques et ROM140 pour la partie amortissement). Les simulations uni-domaine nécessaires à l'établissement des différentes fonctions d'approximations des termes non-linéaires sont faites automatiquement. La simulation transitoire d'un micro-interrupteur pour un échelon de tension supérieure à sa tension de pull-in sert de validation. L'erreur sur le déplacement du point milieu est d'environ 15%.

### ***b. Modèle mécanique***

On s'intéresse ici plus particulièrement au modèle mécanique. L'utilisation d'une approche s'apparentant sous certains aspects à la théorie des modes propres non-linéaires permet de rendre compte correctement des non linéarités mécaniques.

Le modèle mécanique de [Gabbay 2000] est basé sur les modes propres linéaires de la structure établis à partir d'un modèle éléments finis. L'expression de l'énergie mécanique a alors la forme suivante :

$$U_m(\mathbf{q}) = \sum_i \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 q_i^2 \quad (3-2)$$

Où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées modales, les  $\omega_i$  les fréquences propres de résonances et les  $M_i$ , les masses modales.

[Gabbay 2000] fait des simulations quasi-statiques de la structure actionnée électrostatiquement avec le modèle linéaire ci-dessus et avec un modèle éléments finis non linéaire électro-mécanique établi à l'aide du logiciel CoSolve-EM. Aucune autre précision n'est donnée sur le modèle mécanique éléments finis utilisé. Il apparaît que le modèle linéaire sous-estime la raideur de la poutre par rapport au modèle élément finis. Dans un deuxième temps, [Gabbay 2000] établit une fonction d'approximation de l'énergie mécanique non linéaire en fonction de coordonnées modales correspondant aux modes propres linéaires de la structure à partir de données issues de simulations éléments finis. Il s'avère que le modèle obtenu surestime la raideur de la poutre. Ainsi le modèle linéaire contraignant certains degrés de liberté de la poutre, les modes propres linéaires ne suffisent pas à la construction d'un bon modèle non linéaire. [Mehner 2000] cherche à améliorer ce modèle. Il se place dans le cadre des modes normaux non-linéaires (MNNs). Il se base sur des modes de la structure mécanique où seuls les mouvements des nœuds de la surface neutre dans la direction principale du mouvement sont contraints. Les autres degrés de liberté sont libres ce qui laisse par exemple la possibilité de contractions de Poisson non prises en compte dans les modèles de [Gabbay 2000]. Du point de vue des MNNs, on peut considérer qu'il choisit une variable maître qui est la coordonnée modale du déplacement dans la direction principale de la ligne neutre. Une coordonnée maître équivalente serait de choisir le déplacement dans la direction principale



d'un nœud de la ligne neutre. Les déplacements de ce nœud maître dans les deux autres directions ainsi que les déplacements dans les trois directions de tous les autres nœuds sont alors des coordonnées esclaves. Il ne relèvera pas les déplacements de tous les nœuds mais seulement la grandeur macroscopique nécessaire à l'établissement de la dynamique, c'est-à-dire l'énergie mécanique. Il en établit ensuite une expression approchée par une méthode des perturbations en supposant un mode dominant. Les données permettant la détermination de l'expression approchée sous la forme d'un polynôme d'ordre 4 des coordonnées modales sont issues de simulations correspondant à un mouvement du premier mode modifié en interaction avec les autres modes mineurs modifiés aussi. Ce modèle rend compte correctement des effets non linéaires d'une structure en grands déplacements.

### **3.1.4.2. [Hung 1999], [Rewiński 2003 B], [Chen 2004].**

[Hung 1999], [Rewiński 2003 B], [Chen 2004] traitent un même exemple de micro-interrupteur régi par l'équation d'Euler-Bernoulli dans le cas linéaire (3-1), par l'équation de Reynolds dans le régime de Knudsen (2-37) et dont l'actionnement électrostatique est modélisé par l'approximation des capacités planes. On s'intéresse aux performances des méthodes, on ne rappelle que brièvement leur principe celui-ci ayant été décrit plus haut en détail.

[Chen 2004] linéarise les équations et en établit un schéma différences finies pour en extraire une base de Krylov par la méthode d'Arnoldi (cf §1.1.2). Parallèlement il fait un développement de Taylor des termes non-linéaires de l'équation d'origine à l'ordre deux ou trois. Puis il projette l'équation obtenue sur la base de Krylov précédente. Son modèle ne parvient pas à décrire des déplacements de plus de 20% de l'écart initial, la base réduite étant de dimension 5 et l'ordre du développement de Taylor 3.

[Rewiński 2003 B] développe un modèle linéaire par morceaux dont la base de projection est construite par concaténation des espaces de Krylov issus des modèles linéarisés autour de différents points de l'espace des phases. A partir d'un modèle différences finies d'ordre  $N=880$  (nombre de variables d'états), il obtient des résultats satisfaisants avec un modèle réduit d'ordre 41 et 9 points de linéarisation.

[Hung 1999] utilise la méthode de Galerkin avec des modes issus de la décomposition propre orthogonale (§1.2.2). A partir d'un modèle différences finies d'ordre  $N=240$  (pour le maillage de 1/4 de la poutre) et de 4 trajectoires d'apprentissage (nécessitant des simulations du modèle différences finies complet), il obtient des résultats satisfaisants avec un modèle d'ordre 4 (2

modes mécaniques, 2 modes pression) pour un échelon de tension en entrée. Le temps de simulation est divisé par 37. Il remarque que le gain en efficacité augmente avec l'ordre du système initial. Il compare aussi les résultats sur le temps d'effondrement à des résultats expérimentaux.

### **3.2. Modèle couplé fluide-structure d'un micro-interrupteur à contact capacitif**

#### **3.2.1. Equations**

On modélise le micro-interrupteur actionné électrostatiquement de la figure 3-1. On a retenu le modèle de Reynolds avec changement de variable. Le système d'équations aux dérivées partielles le régissant est :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (S + S_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon_0 w V^2}{2} \frac{1}{(G_0 - w(x, t))^2} + f_{flu} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-9a)$$

avec

$$S = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3-9b)$$

$$\Delta \phi - \phi \frac{\Delta \psi^{1/2}}{\psi^{1/2}} = \frac{12\mu_N}{\psi^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{\phi \psi^{-1/2}}{P_0} \right) \right) \quad (3-10a)$$

avec

$$p = \phi \psi^{-1/2} \quad (3-10b)$$

$$\psi(G) = (1 + 6K_n)G^3 \quad (3-10c)$$

#### **3.2.2. Modèle réduit**

##### **3.2.2.1. Euler-Bernoulli**

Le modèle mécanique est basé sur l'équation d'Euler-Bernoulli linéaire ou non-linéaire pour une poutre (3-9a). Rigoureusement, si le déplacement de la poutre est de l'ordre de grandeur de son épaisseur, la force axiale (3-9b) doit être prise en compte.

Le modèle mécanique réduit est obtenu par la méthode de Galerkin appliquée à (3-9a). La base sélectionnée est constituée d'une sélection de  $N$  modes de vibrations de la poutre. On a

reporté la dérivation de l'expression de ces modes en annexe B. En projetant le terme comprenant la tension axiale de (3-9b) sur les  $N$  modes propres mécaniques, on obtient :

$$S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \middle| w_l \right\rangle = S \left[ \frac{\partial w}{\partial x} w_l \right]_0^L - S \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_l}{\partial x} dx = -S \sum_{i=1}^N a_i \left\langle \frac{\partial w_i}{\partial x} \middle| \frac{\partial w_l}{\partial x} \right\rangle = -S \sum_{i=1}^N H_{li} a_i \quad (3-11a)$$

pour  $l = 1, \dots, N$

où  $a_i$ ,  $i=1, \dots, N$  sont les coordonnées modales de la structure

$$\text{avec } H_{lk} = \left\langle \frac{\partial w_k}{\partial x} \middle| \frac{\partial w_l}{\partial x} \right\rangle, k = 1, \dots, N, l = 1, \dots, N \quad (3-11b)$$

$$S = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{EA}{2L} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j H_{ij}$$

$$\text{soit } S = \mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a} \quad (3-12)$$

On obtient alors un modèle de la forme :

$$\mathbf{K} \mathbf{a} + (\mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a}) \mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^e + \mathbf{p}^{flu} \quad (3-13a)$$

$$\text{où } \mathbf{M} = \rho A \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

$$\text{et } \mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \beta_1^4 & & \dots & \\ & \beta_2^4 & & \\ \dots & & \dots & \\ & & \dots & \beta_N^4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs  $\beta_i^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2$ ,  $i=1, \dots, N$  où les  $\omega_i$  sont les pulsations propres associées aux modes propres  $w_i$ .

Soit :

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{a}) \mathbf{a} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^e + \mathbf{p}^{flu} \quad (3-13b)$$

avec

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{a}) = \mathbf{K} + (\mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a}) \mathbf{H}$$

$\mathbf{a}$  sont les coordonnées modales mécaniques,  $\mathbf{p}^e$  et  $\mathbf{p}^{flu}$  sont respectivement la projection de la force électrostatique et de la force fluïdique sur les  $N$  modes sélectionnés.

### 3.2.2.2. Equation de Reynolds

La base sur laquelle on développe la solution est constituée d'une sélection des modes propres du Laplacien. Le modèle issu de la méthode de Galerkin appliquée à (3-10a) est donné équation (2-45) au § 2.4.3.

### 3.2.2.3. Modèle couplé

On a :

$$p_l^{flu} = \langle p | w_l \rangle = \sum_{k=1}^{N_S} \langle \varphi_k \psi^{-1/2} | w_l \rangle s_k(t) = \sum_{k=1}^{N_S} BP_{lk} s_k(t), \quad (3-14)$$

avec  $BP_{lk} = \langle \varphi_k \psi^{-1/2} | w_l \rangle$  pour  $l = 1, \dots, N$

où  $N_S$  est le nombre de modes d'amortissement retenus.

Si on assemble les modèles mécanique et fluide, on obtient donc le modèle réduit couplé suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K}_2(\mathbf{a}) & 0 & \mathbf{BP}(\mathbf{a}) \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}^e(\mathbf{a}, t) \\ -\mathbf{f}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} \quad (3-15a)$$

On peut alors écrire (3-15a) sous la forme :

$$\mathbf{M}_f(\mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{z})\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z}, t) \quad (3-15b)$$

où

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (3-15c)$$

L'intégration dans le temps de cette équation peut alors se faire en utilisant les solveurs dédiés de Matlab (ode15s,...).

### 3.2.3. Importance de l'amortissement dans la dynamique du système étudié.

#### 3.2.3.1. Cas étudié

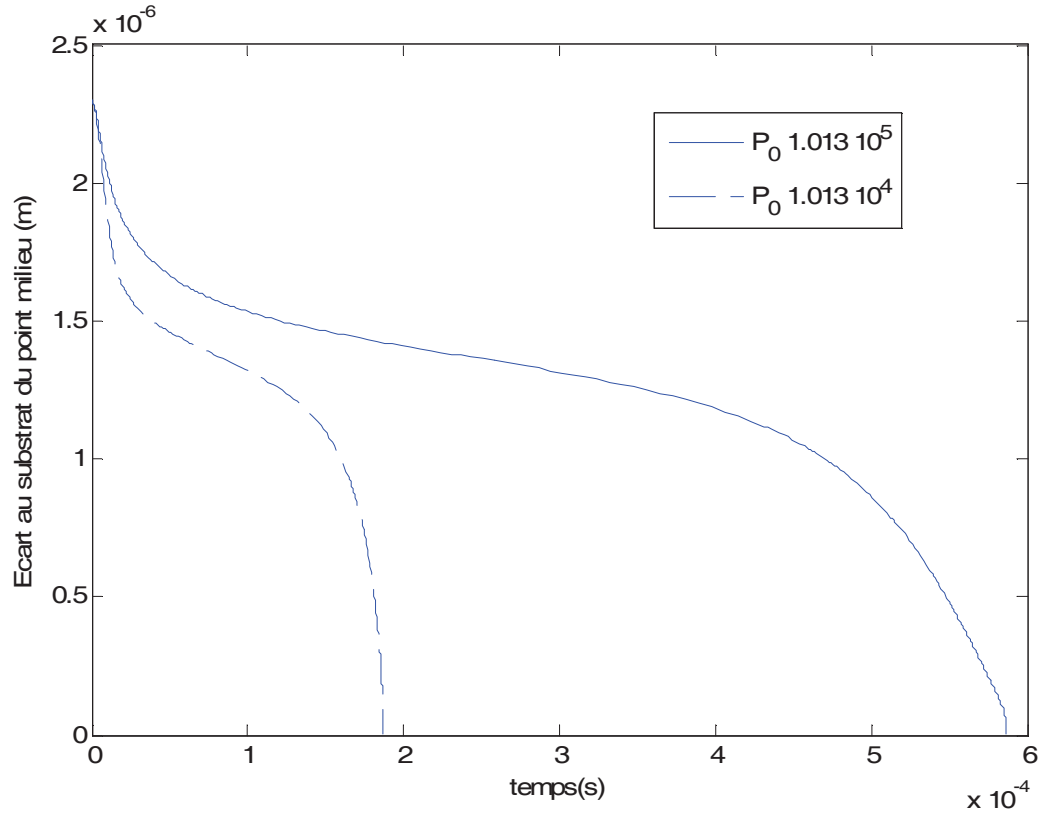
Pour valider le modèle d'amortissement dû au film d'air comprimé, on utilise l'exemple utilisé par [Hung 1999] repris ensuite par [Rewienski 2003 B]. Ce microsystème (Figure 3-1) a le même type de fonctionnement qu'un micro-interrupteur à contact capacitif. Le temps d'effondrement dépendant de la pression, il a été envisagé de l'utiliser comme capteur de pression [Gupta 1997].

Les paramètres caractéristiques de la poutre étudiée sont les suivants : longueur  $L = 610 \mu\text{m}$ , largeur  $W = 40 \mu\text{m}$ , épaisseur  $h = 2.2 \mu\text{m}$ , distance au repos entre les électrodes  $G_0 = 2.3 \mu\text{m}$ , module d'Young  $E = 149 \times 10^9 \text{Pa}$ , tension résiduelle  $S_0 = -3.7 \text{MPa}$ , densité du matériau de la poutre  $\rho = 2330 \text{kg.m}^{-3}$ . Par ailleurs la viscosité de l'air vaut  $\mu = 1.82 \times 10^{-5} \text{Pa.s}$  et la permittivité du vide  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ . Le parcours libre moyen dans l'air à pression atmosphérique  $P_{atm}$  vaut  $\lambda_0 = 64 \text{nm}$ , ce qui n'est plus négligeable devant  $G_0$  ( $2\% G_0$ ). C'est d'autant plus vrai si la pression ambiante  $P_0$  diminue. Le libre parcours moyen vaut alors  $\lambda = \lambda_0 \frac{P_{atm}}{P_0}$ . On utilise alors le modèle suivant pour la viscosité effective :

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + 6 \frac{\lambda}{G}} \quad (3-16)$$

Ce modèle sera choisi ou non selon les résultats auxquels on compare ceux de notre modèle réduit.

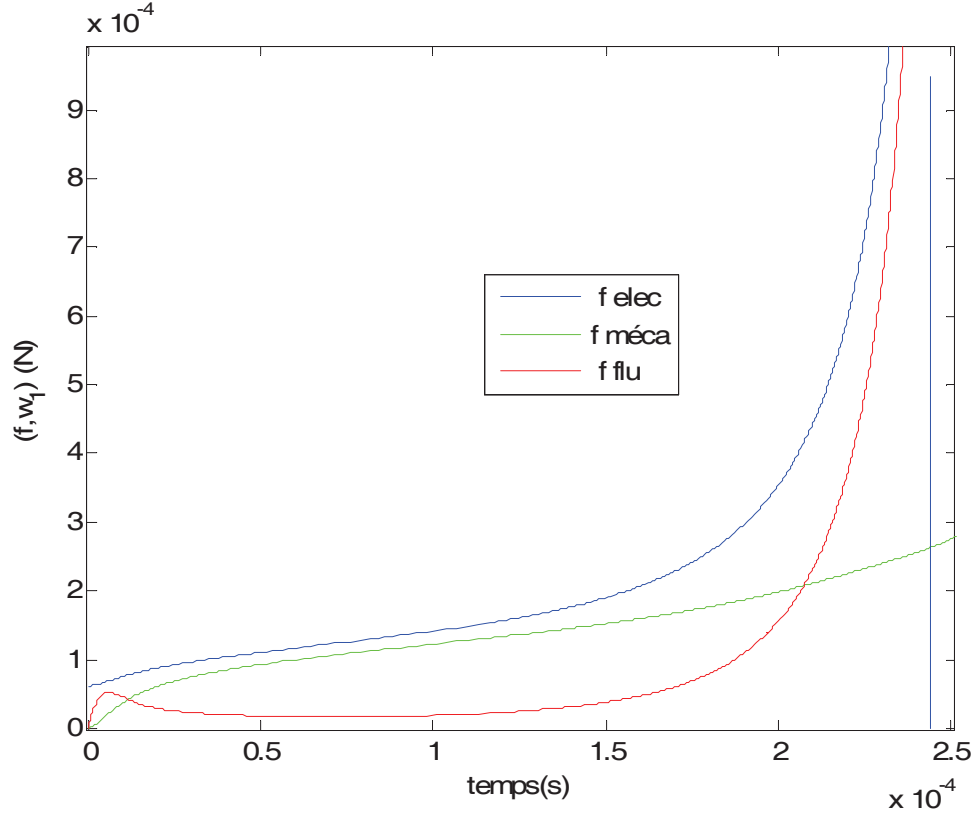
#### 3.2.3.2. Importance de l'amortissement du film d'air dans la dynamique



**Figure 3-6** Réponse à un échelon de tension de 9V pour différentes pressions ambiantes.

On réalise des simulations à des pressions ambiante différentes  $1.013 \times 10^5$  Pa et  $1.013 \times 10^4$  Pa pour la structure décrite ci-dessus. On retient un seul mode propre mécanique ( $N=1$ ) et 4 modes d'amortissement ( $N_s=4$ ). On ne prend pas en compte les grandes déformations mais on se place dans le régime de Knudsen. La tension d'effondrement de cette structure est 8.87 V. La figure 3-6 montre que la pression ambiante a une grande influence sur la dynamique du système, c'est-à-dire que les phénomènes d'amortissement jouent un rôle important. Reste à savoir quels phénomènes exactement et dans quelle mesure il est important d'avoir une bonne modélisation de l'amortissement.

On observe à la figure 3-7 la valeur absolue des différentes forces projetées sur le premier mode mécanique pour un échelon de 9.5V et une pression ambiante de  $1.013 \times 10^5$  Pa.



**Figure 3-7** Valeur absolues des différentes forces projetées sur le premier mode mécanique

En effet, l'hypothèse des petites variations de pression n'est plus valable sur la fin de la simulation : la pression tend vers l'infini. Les résultats sont toutefois valables pour deux raisons : la pression ne dépasse 10% de la pression ambiante que sur la toute fin de la simulation et la force de pression devient négligeable par rapport à la force électrostatique. En effet, la pression au point milieu atteint 10% de la pression ambiante alors que la poutre a déjà parcouru 90% de la distance initiale au substrat. D'autre part au moment où la variation de pression atteint la valeur de la pression ambiante, la force électrostatique vaut déjà deux fois la force de pression. On a marqué le temps où l'on atteint la limite de validité du modèle par une ligne verticale bleue.

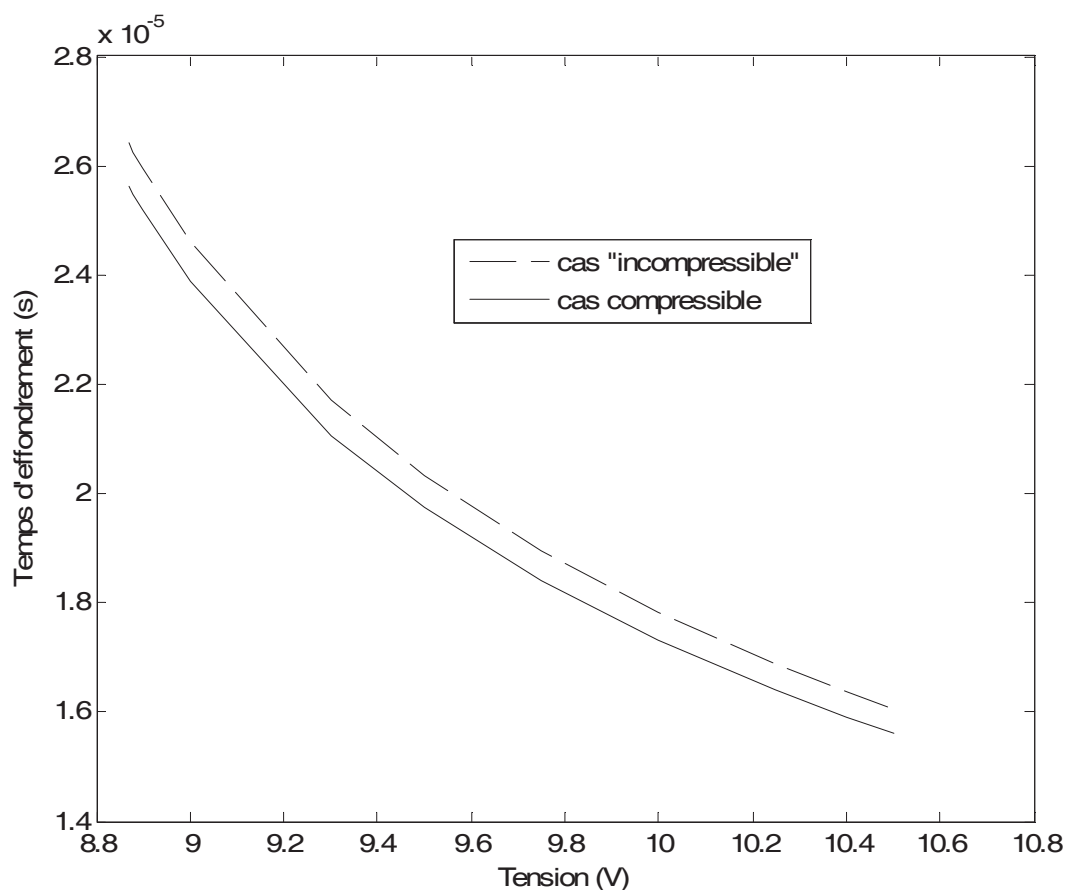
### 3.2.3.3. « Incompressibilité »/ Petite variation de pression

L'équation de Reynolds dans le régime de Knudsen avec l'hypothèse des petites variations de pression a la forme :

$$\nabla \left( \frac{G^3(1+6K)}{12\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) = \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{G}{P_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3-17)$$

Négliger le deuxième terme du membre de droite de (3-17) car les variations de pression sont faibles et lentes correspondent à ce qui est appelé dans la littérature hypothèse d'« incompressibilité », même si à strictement parler le gaz n'est pas incompressible. En effet, on fait l'hypothèse des gaz parfaits : si le gaz est incompressible, la pression ne varie pas.

On avait déjà une indication qualitative de l'influence des différents paramètres sur l'importance du phénomène de compressibilité dans le cas linéaire et en régime sinusoïdal de part la fréquence de coupure ou le nombre de squeeze. Ici on va vérifier l'influence de la pression ambiante et de la largeur de la poutre sur la nécessité ou pas de prendre en compte la compressibilité du gaz dans le modèle dans le cas non linéaire et sur une simulation en transitoire. On compare les temps de commutation avec et sans cette hypothèse supplémentaire.

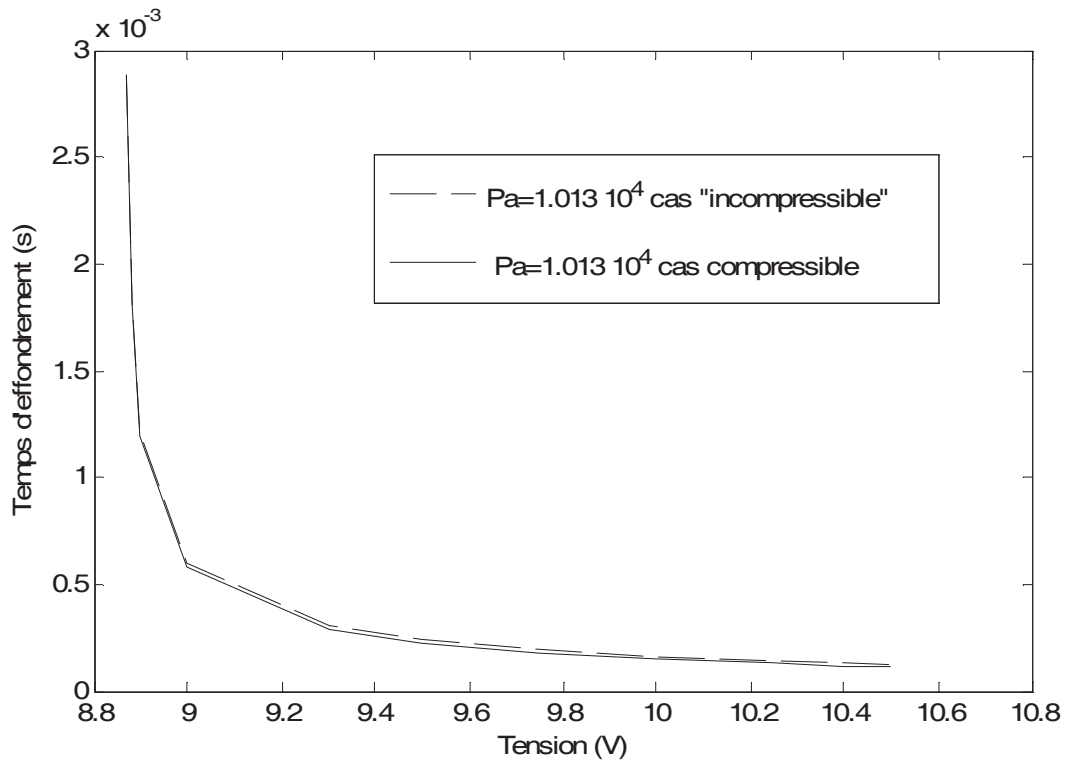


**Figure 3-8** Temps d'effondrement de la structure [Hung 1999] à une pression ambiante  $P_0=1.013 \cdot 10^3$  Pa.

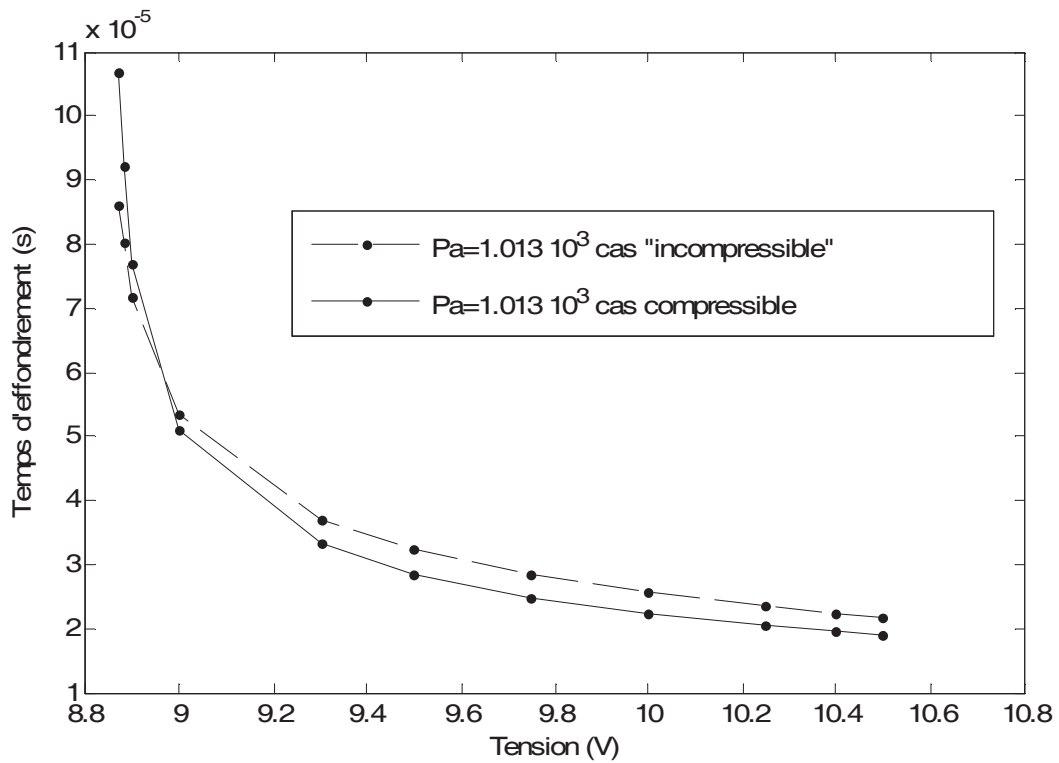
La figure 3-8 montre des résultats pour le micro-interrupteur décrit ci-dessus pour une pression ambiante de  $P_0=1.013 \cdot 10^3$  Pa. Les figures 3-9 et 3-10 montrent des résultats pour une



largeur de 70  $\mu\text{m}$ , les autres dimensions étant égales à celle de [Hung 1999], et des pressions respectivement égales à  $1.013 \times 10^4$  Pa et  $1.013 \times 10^3$  Pa.



**Figure 3-9** Temps d'effondrement, Largeur 70  $\mu\text{m}$ , Pression ambiante  $P_0 = 1.013 \times 10^4$  Pa



**Figure 3-10** Temps d'effondrement, Largeur 70  $\mu\text{m}$ , Pression ambiante  $P_0 = 1.013 \times 10^3$  Pa

A pression ambiante et même à 1/10 de la pression ambiante, il n'est pas nécessaire de prendre en compte le terme  $\frac{\partial p}{\partial t}$  pour la structure considérée. Par contre si on baisse la pression ambiante et/ou que l'on augmente la largeur de la structure, alors le phénomène de compressibilité devient plus important ce qui était bien prédit par le modèle linéaire.

### 3.2.3.4. Importance du modèle de la viscosité

Les figures 3-11 et 3-12 donnent les résultats concernant les temps d'effondrement avec le modèle de la viscosité constante et le modèle faisant intervenir le nombre de Knudsen (3-16). On constate une différence à pression atmosphérique alors que le libre parcours moyen ne vaut que 3% de l'écart au substrat. Le temps d'effondrement diminue quand on prend en compte la viscosité effective. A une pression inférieure à savoir  $1.013 \cdot 10^4$  Pa, l'écart est encore plus important ce qui est logique car alors le libre parcours moyen vaut presque 30% de l'écart initial au substrat.

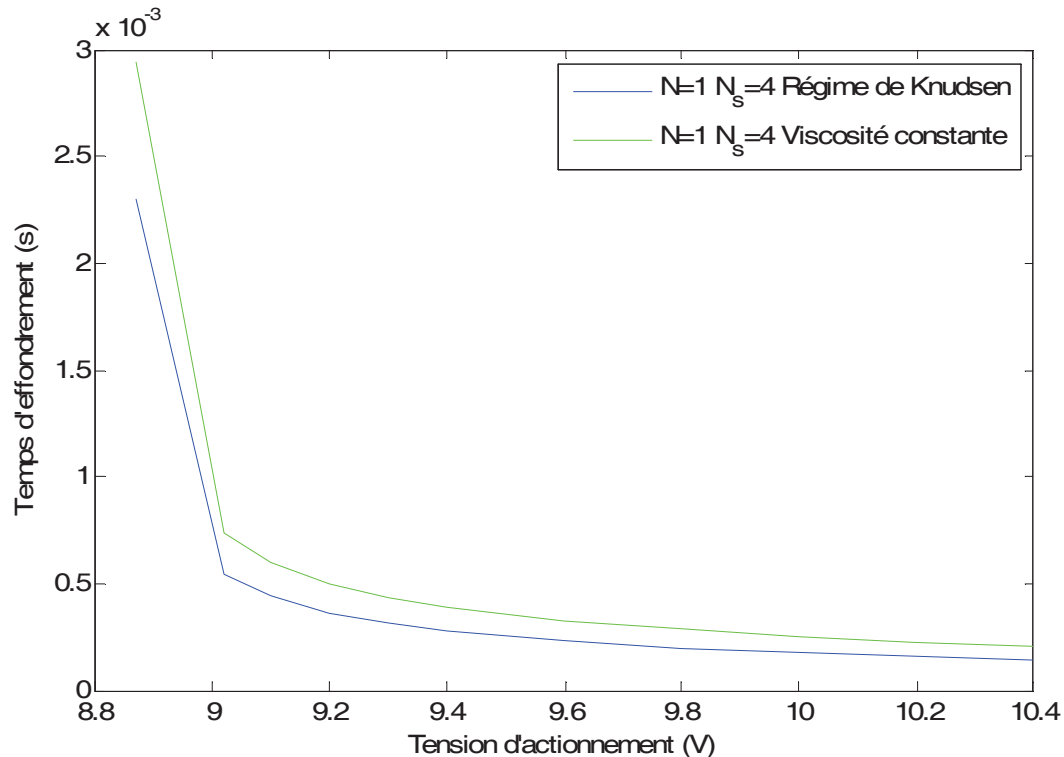
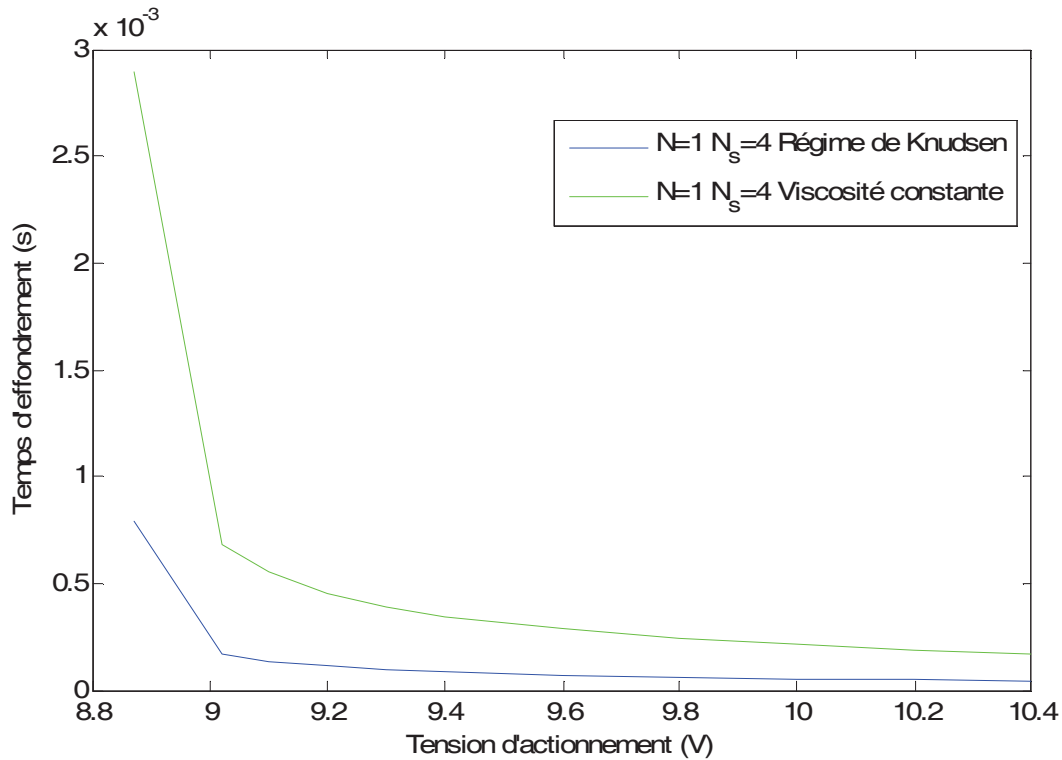


Figure 3-11 Mesure des temps d'effondrement à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa.



**Figure 3-12** Mesure des temps d'effondrements pour une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^4$  Pa.

### 3.2.4. Validation du modèle : comparaison à un modèle différences finies

#### 3.2.4.1. Modèle différences finies

Le modèle mécanique est le modèle basé sur l'équation d'Euler-Bernoulli incluant ou pas la force axiale due aux grands déplacements. On travaille en outre sur le modèle de l'équation de Reynolds à viscosité constante, c'est-à-dire que l'on n'est pas dans le régime de Knudsen. Le modèle différences finies fluide est construit avec l'hypothèse des petites variations de pression.

On présente les deux méthodes de résolution, la résolution directe du système couplé et la méthode de relaxation. Les résultats des deux méthodes sont concordants. Le modèle couplé a une limitation supplémentaire due aux limites de puissance de calcul de l'ordinateur à disposition. La méthode de relaxation offrira plus de possibilités en termes de nombres de points du maillage.

On compare les résultats de notre modèle réduit à ceux du modèle différences finies dans l'objectif de valider le modèle réduit construit.

#### *a. Modèle couplé*

On assemble les modèles différences finies mécanique et fluide pour obtenir un modèle couplé de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\mathbf{w}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\text{elec}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Où  $\mathbf{w}$ , vecteur des déplacements, et  $\mathbf{p}$ , vecteurs de pressions.

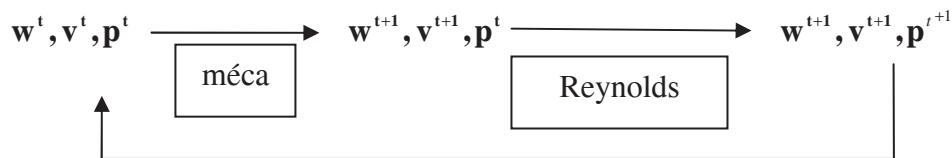
Le détail du schéma différences finies concernant l'équation d'Euler-Bernoulli est fourni en annexe E, ainsi que celui de l'équation de Reynolds qui diffère quelque peu de celui présenté en annexe C. On utilise le solveur dédié de Matlab ode15s pour résoudre ce système d'EDO non-linéaires.

### ***b. Méthode de relaxation***

On détaille ici le schéma numérique de la méthode de relaxation utilisée.

Soit  $\mathbf{w}$ , le vecteur des déplacements,  $\mathbf{v}$ , le vecteur des vitesses, et  $\mathbf{p}$  le vecteur des pressions aux différents points du maillage.

On résout le système couplé selon le schéma représenté à la Figure 3-12.



**Figure 3-13** Schéma numérique de résolution de l'équation de Reynolds

Le bloc « méca » correspond à la résolution d'Euler-Bernoulli avec inclusion des grands déplacements ou pas selon un schéma prédicteur-correcteur. La partie électrostatique est incluse dans le bloc « méca » via l'approximation des capacités planes donnant une expression explicite de la force électrostatique fonction du déplacement. Le bloc « Reynolds » correspond à la résolution implicite de l'équation de Reynolds avec l'hypothèse des petites variations de pression (2-37).

Le découplage des différents domaines permet de réduire la taille des problèmes à résoudre mais aussi de les ramener à une intégration dans le temps qui ne nécessite que la résolution de systèmes linéaires. Cette approche permet de travailler avec un maillage de dimension importante.

### 3.2.4.2. Résultats

On compare, pour la poutre décrite au § 3.2.3.1. , les résultats obtenus à l'aide des différents modèles dans le cas où :

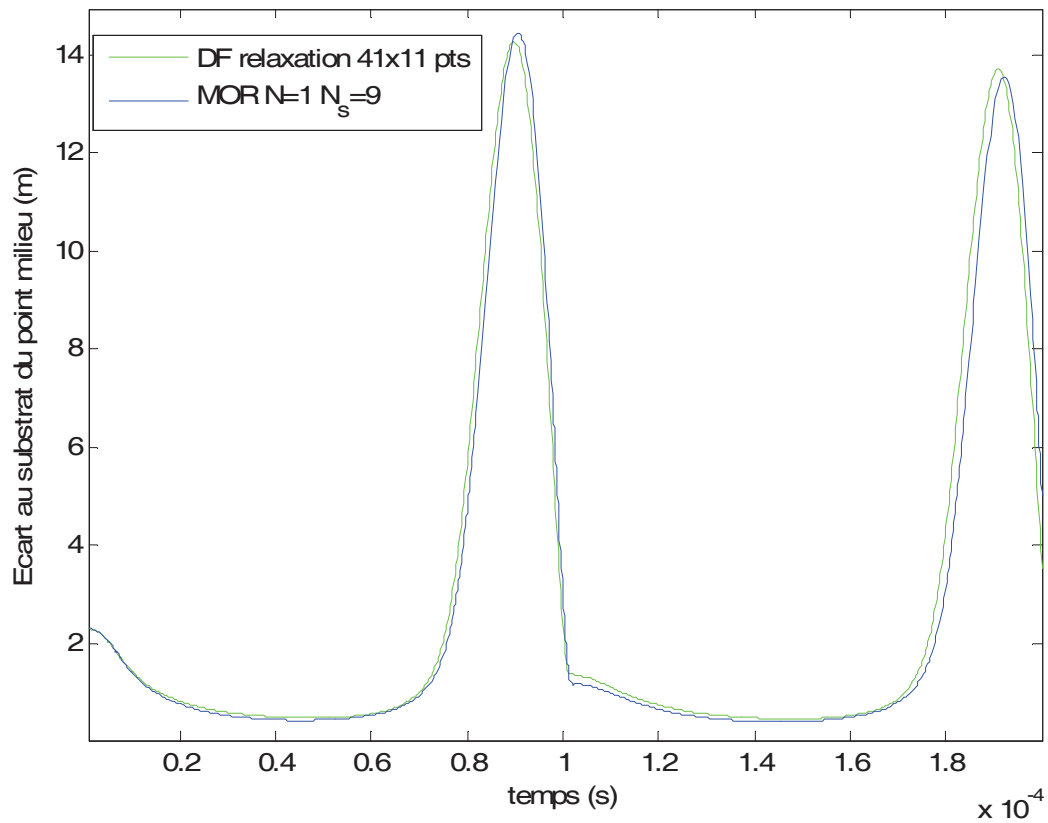
- la force d'actionnement est uniforme et sinusoïdale.
- la force d'actionnement est due à l'application d'une tension continue entre la poutre et le substrat.

L'objectif est ici de valider le modèle réduit en comparant les résultats à ceux donnés par le modèle différences finies. Le modèle différences finies repose sur l'utilisation de 41 points sur la longueur de la poutre et 11 points sur la largeur. Le nombre de points utilisés pour évaluer les intégrales pour les modèles réduit est choisi de manière à coller au maillage différences finies. On compare ici le déplacement du point milieu pour les deux modèles. Notre modèle réduit est intégré dans le temps à l'aide du solveur ode15s de Matlab. Le modèle différences finies est intégré dans le temps selon la méthode décrite au § 3.2.4.1\b. On a vérifié que dans les deux cas, force uniforme et actionnement par une tension continue, un seul mode mécanique suffit. Pour la partie fluide, on considère que le modèle converge quand, si on ajoute un mode supplémentaire selon l'une des deux directions l'erreur entre les deux résultats n'est pas de plus de 2%.

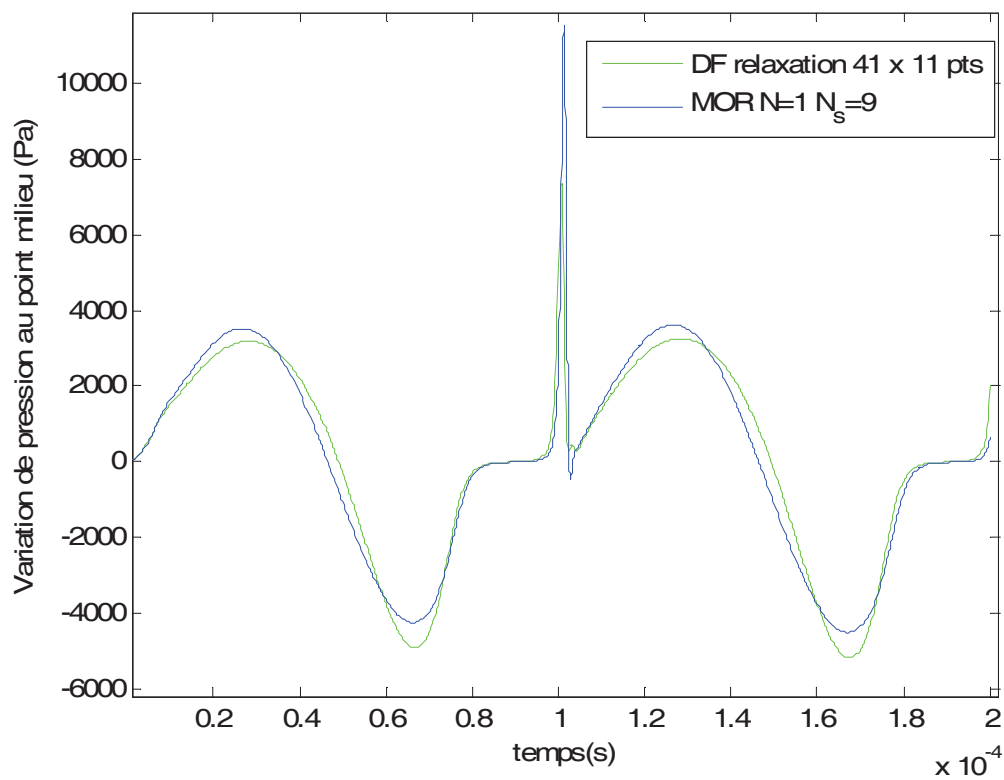
#### *c. Force uniforme*

On va traiter deux exemples. Dans le premier cas on applique une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $5 \cdot 10^{-2}$  N/m, de fréquence 10 kHz à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa. Le phénomène de compressibilité sera négligeable mais le phénomène fluide sera fortement non linéaire du fait des grands déplacements. Dans un deuxième cas l'amplitude de la force sera de  $2 \cdot 10^{-2}$  N/m, sa fréquence 100 kHz et la pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^4$  Pa. Le phénomène de compressibilité prendra alors plus d'importance limitant assez rapidement l'amplitude du déplacement possible du fait de l'hypothèse des petites variations de pression. Le phénomène observé ne sera que faiblement non linéaire mais fera intervenir la compressibilité du film.

Le modèle différences finies est intégré dans le temps avec 400 points par période. Les figures 3-14 et 3-15 présentent les résultats pour le premier cas.

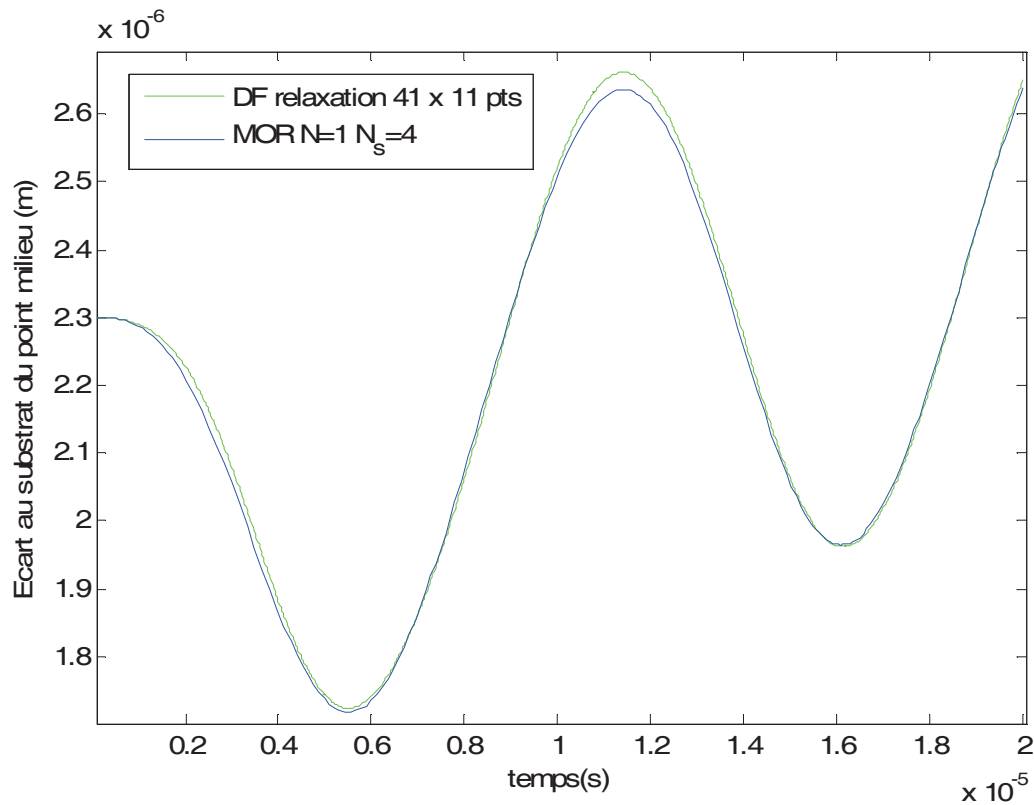


**Figure 3-14** Ecart au substrat pour une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $5 \cdot 10^{-2}$  N/m, de fréquence 10 kHz à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa.

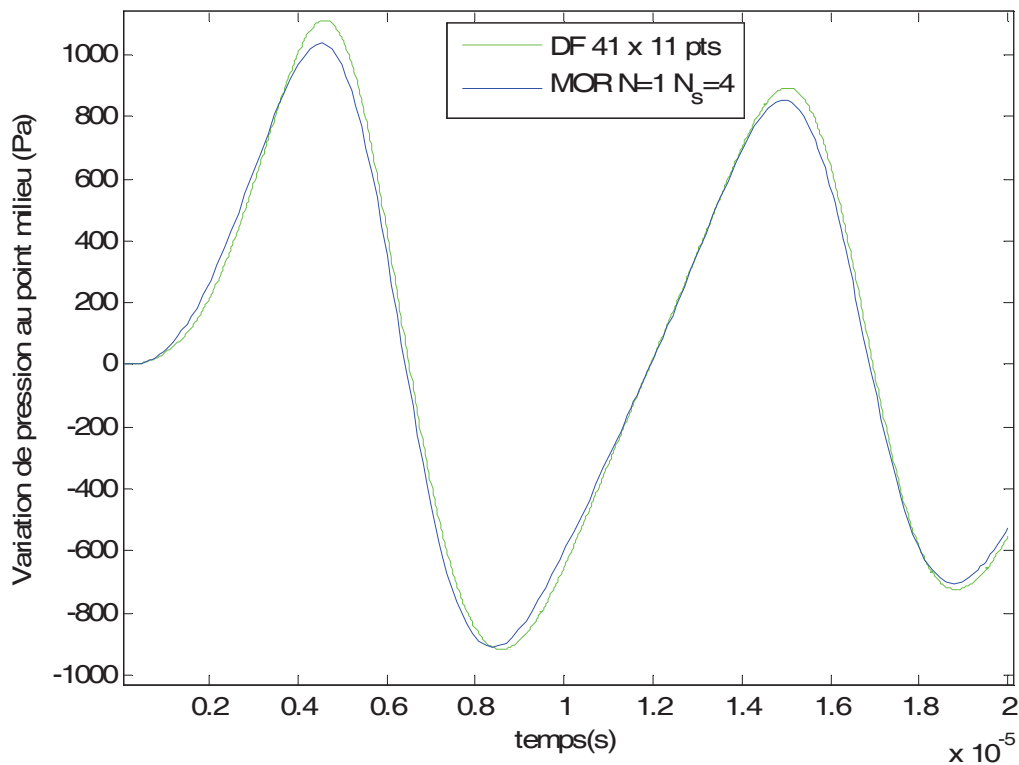


**Figure 3-15** Variation de pression au point milieu pour une force d'excitation de la poutre uniforme sinusoïdale d'amplitude  $5 \cdot 10^{-2}$  N/m, de fréquence 10 kHz à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa.

On peut considérer que le modèle réduit converge pour 9 modes d'amortissement.. Les erreurs relatives sont de 3% pour le déplacement et 13.5% pour la pression au point milieu. Les figures 3-16 et 3-17 présentent les résultats pour l'écart au substrat et la pression au point milieu pour les deux modèles pour le deuxième cas d'étude. Dans ce cas 4 modes d'amortissement suffisent à la convergence du modèle. L'erreur maximum sur la pression et sur le déplacement est d'environ 7%.



**Figure 3-16** Ecart au substrat pour une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $2 \cdot 10^{-2}$  N/m, de fréquence 100 kHz à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^4$  Pa.



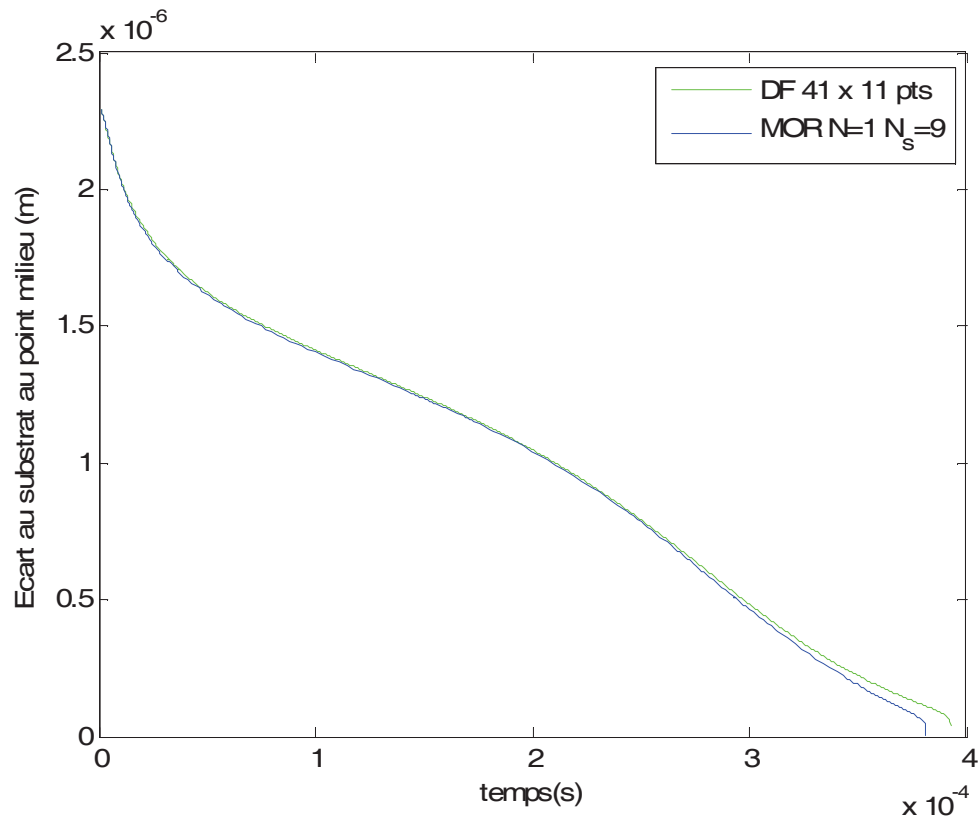
**Figure 3-17** Variation de pression au point milieu pour une force d'excitation de la poutre uniforme sinusoïdale d'amplitude  $2 \cdot 10^{-2}$  N/m, de fréquence 100 kHz à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^4$  Pa

#### *d. Force électrostatique*

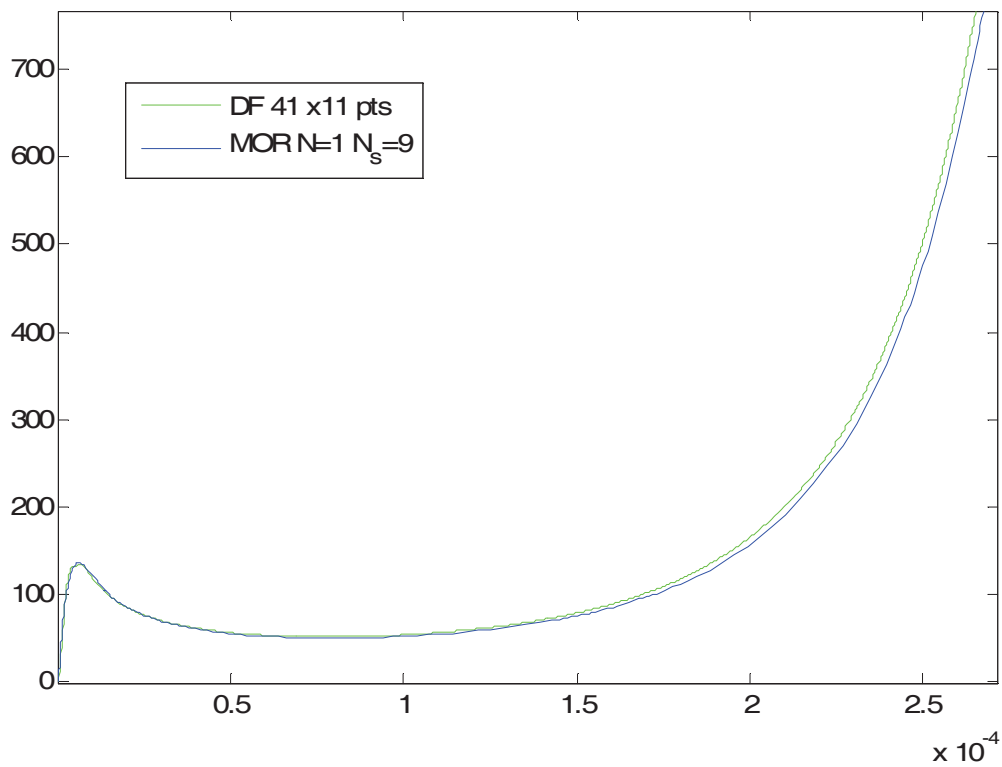
On applique maintenant une tension échelon de 9.5V à une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^5$  Pa. On note que l'hypothèse des petites variations de pression n'est plus valable sur la fin de la simulation mais que pour les raisons exposées plus haut cela n'a pas d'incidence sur le temps de commutation.

En ce qui concerne le nombre de modes, notre modèle donne un temps d'effondrement à 1.5% près pour un modèle à 9 modes d'amortissement par rapport à un modèle à 16 modes. Les figures 3-18 et 3-19 présentent les résultats pour l'écart au substrat et la variation de pression au point milieu. Notre modèle réduit donne pour un modèle à 9 modes d'amortissement un temps d'effondrement à 3% par rapport au code différences finies.





**Figure 3-18** Ecart au substrat du point milieu pour une activation par une tension échelon de 9.5 V. La pression ambiante est de  $1.013 \times 10^5$  Pa.



**Figure 3-19** Variation de pression au point milieu pour une activation par une tension échelon de 9.5 V. La pression ambiante est de  $1.013 \times 10^5$  Pa.

### 3.2.5. Validation du modèle : comparaison à des résultats de la littérature.

Dans un premier temps, on comparera les résultats de notre modèle réduit à d'autres modèles différences finies de la littérature. Dans un deuxième temps, on présentera des données expérimentales. Le système étudié est toujours le même que celui décrit précédemment aux paramètres près pour les données de Gupta *et al.* [Gupta 1996]. On présentera aussi les résultats du modèle de Hung avec comme base de l'équation de Reynolds des modes issus d'une décomposition propre orthogonale.

#### 3.2.5.1. Modèles différences finies de la littérature

##### *a. [Hung 1999]/ [Rewiński 2003 B]*

Les paramètres caractéristiques de la poutre étudiée sont ceux donnés au paragraphe 3.2.3.1. Dans le modèle de [Hung 1999] l'effet des grands déplacements de la poutre n'est pas pris en compte, par contre le modèle de Reynolds est le modèle non-linéaire (2-8) et la limite de continuité du fluide est prise en compte, le modèle de la viscosité est celui présenté au §3.2.3.1.

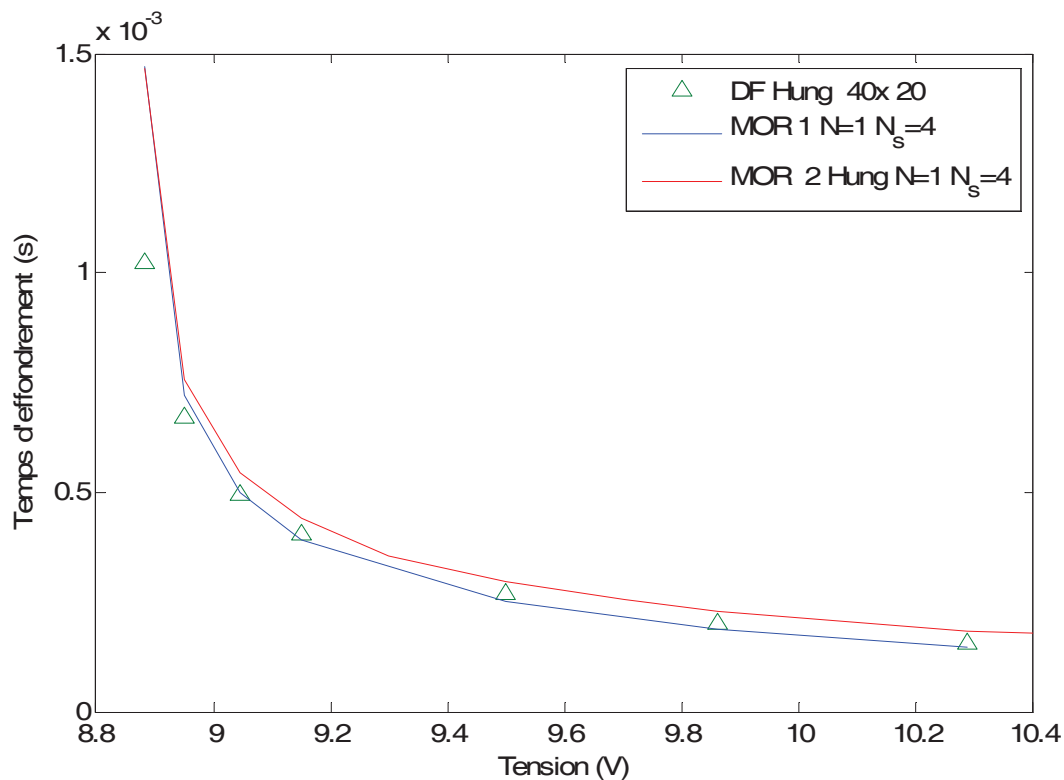
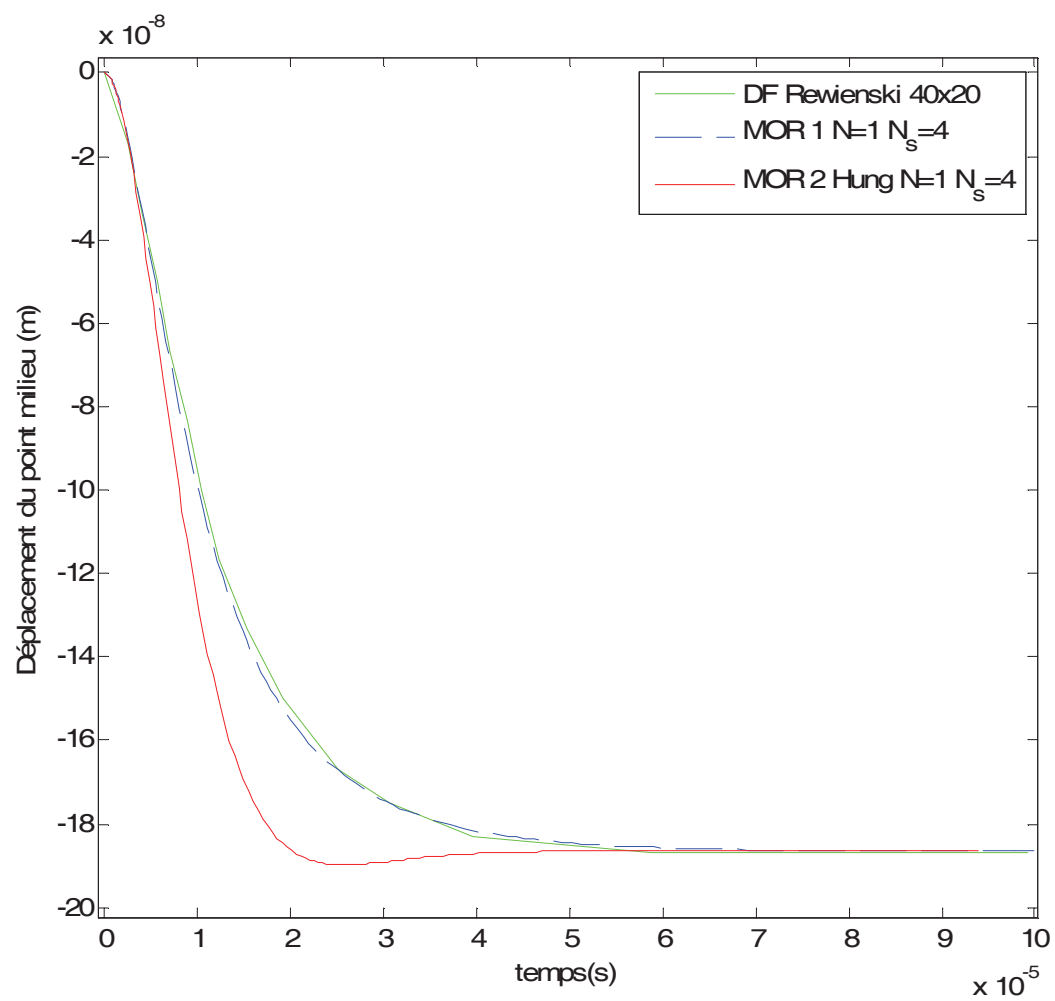


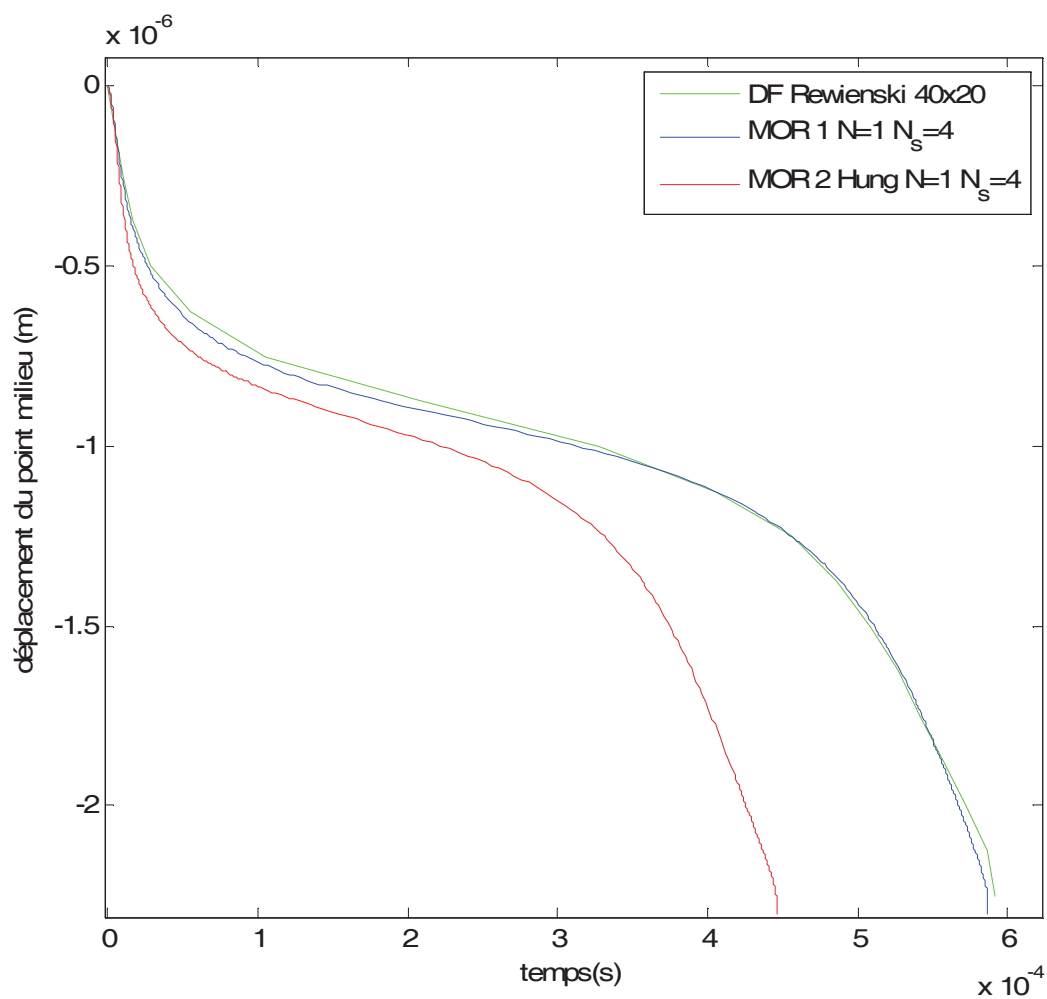
Figure 3-20 Temps d'effondrement en fonction de la tension échelon appliquée

La base de projection de l'équation de Reynolds pour le modèle de Hung *et al.* est issue d'une décomposition propre orthogonale d'une série d'instantanés d'une simulation de l'interrupteur actionné par une tension échelon de 9.5V. La tension d'effondrement prédite par le modèle différences finies de Hung et al. est 8.76V. Notre modèle réduit d'ordre 6 ainsi que celui de Hung de même ordre prédisent une tension d'effondrement de 8.87 V. Notre modèle donne des estimations du temps d'effondrement parfaitement corrects mis à part pour des tensions très proches de la tension d'effondrement. Le modèle de Hung *et al.* donne des résultats de même qualité que notre modèle.

Rewiński *et al.* traitent exactement le même exemple que Hung *et al.*, c'est-à-dire que la limite de validité de l'hypothèse de continuité du fluide est prise en compte mais pas les grands déplacements. Sa poutre est maillée par 40 x 20 nœuds, de même que le modèle différences finies de Hung et al. Les figures 3-21 et 3-22 présentent les trajectoires pour des tensions échelon de 5.5V et 9V à la pression atmosphérique. La variation de pression maximum est de 45 Pa pour 5.5 V, l'hypothèse des petites variations de pression est bien valable. Pour 9 V, la variation de pression atteint 10% de la pression ambiante, limite de validité de l'hypothèse des petites variations de pression, alors que la poutre a déjà parcouru 95% de son déplacement.

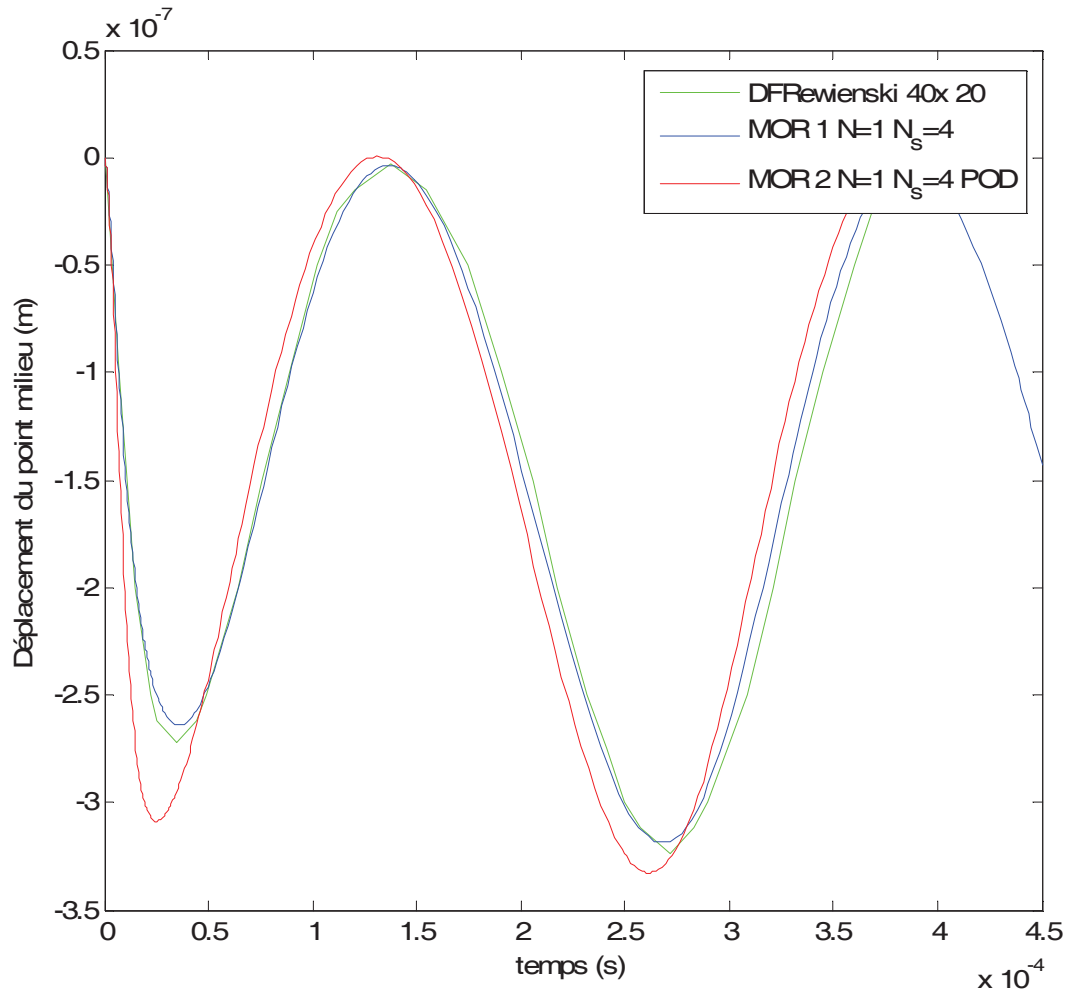


**Figure 3-21** Réponse à un échelon de 5.5 V



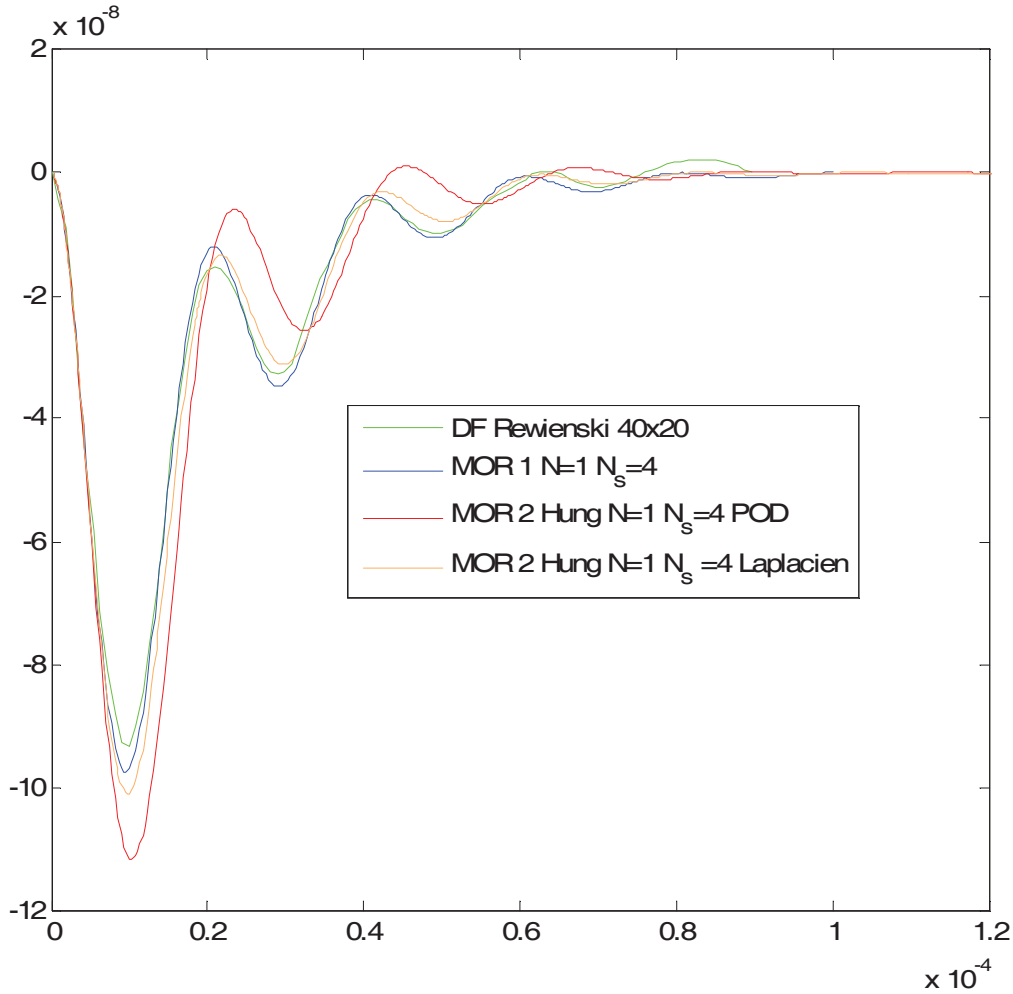
**Figure 3-22** Réponse à un échelon de 9V.

La figure 3-23 présente la réponse à une tension cosinusoidale d'amplitude 7V et de fréquence 2kHz. La variation de pression maximale pour ce cas est de 70 Pa, l'hypothèse des petites variations de pression est donc bien valable.



**Figure 3-23** Réponse à une tension cosinusoidale d'amplitude 7V et de fréquence 2kHz.

La figure 3-24 présente la trajectoire du point milieu pour une tension d'entrée  $v(t) = 5.5 \exp(-50.10^3 t)$  et une pression ambiante de  $1.013 \cdot 10^3$  Pa. Rewiensi semble avoir omis d'adapter le libre parcours moyen qui devient alors 100 fois plus grand qu'à pression atmosphérique. En commettant cette même erreur, les résultats concordent. On constate ici que la base POD pour le modèle de Hung *et al.* ne donne pas de bons résultats. La trajectoire d'apprentissage est en effet assez éloignée de la trajectoire résultant de l'entrée exponentielle. On teste le modèle avec les modes propres du Laplacien, base qui s'était révélée donner des résultats corrects au chapitre 2 (§2.5.4.2). On constate que les résultats sont meilleurs mais toutefois toujours moins bons que ceux de notre modèle réduit.



**Figure 3-24** Réponse à une tension d'entrée  $v(t) = 5.5 \exp(-50.10^3 t)$ .

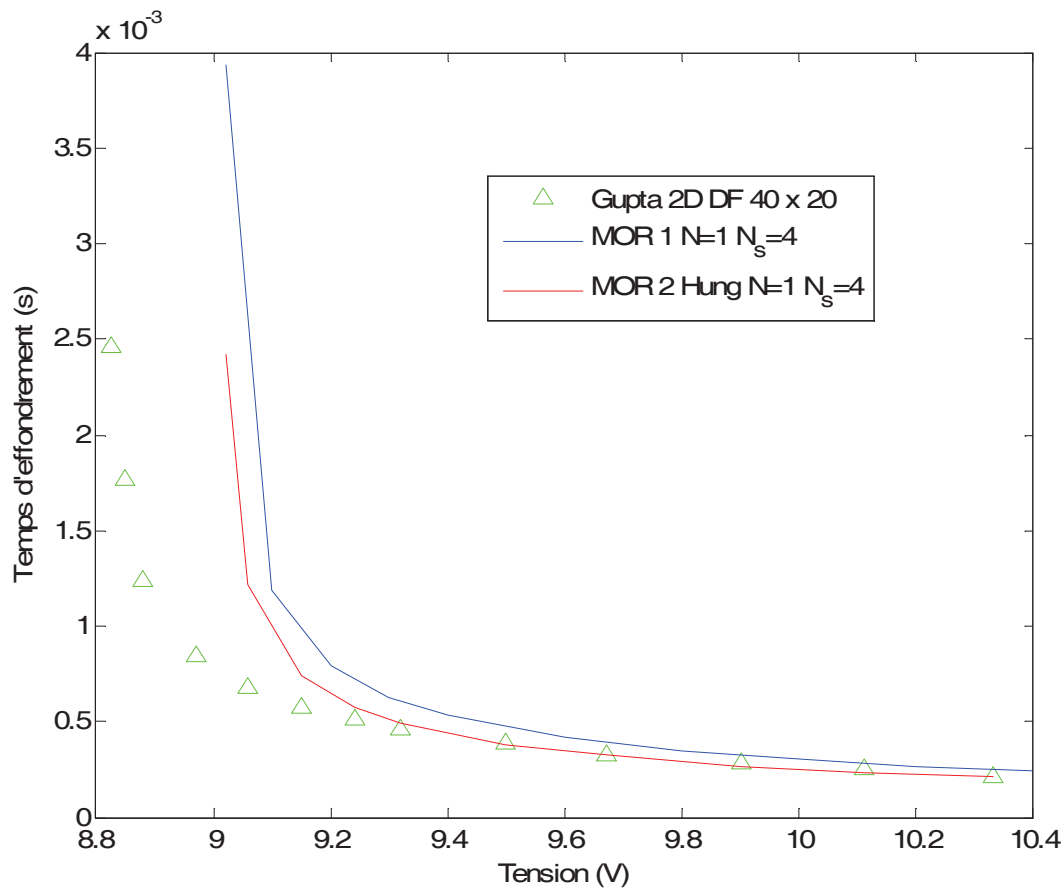
On remarque que notre modèle réduit donne de manière générale de meilleurs résultats que le modèle réduit de Hung *et al.*, particulièrement pour la réponse à un échelon de 9V.

### ***b. [Gupta 1996]***

Les paramètres suivant prennent maintenant les valeurs suivantes : épaisseur  $h = 2.12 \mu m$ , distance au repos entre les électrodes  $G_0 = 2.07 \mu m$ , module d'Young  $E = 164 \times 10^9 Pa$ , tension résiduelle  $S_0 = -3.5 MPa$ , densité du matériau de la poutre  $\rho = 2200 kg.m^{-3}$ . On trouve dans [Gupta 1996] les temps d'effondrement de cette structure donnés par un modèle différences finies deux dimensions. Ce modèle prend en compte les grands déplacements, mais pas la limite de l'hypothèse de continuité du fluide. Il considère la viscosité comme constante. Son modèle reste toutefois basé sur l'équation de Reynolds non-linéaire (2-8).

Ayant mesuré une tension d'effondrement de 8.76V, il a ajusté la valeur de la tension résiduelle  $S_0$  de manière à ce que la valeur de la tension d'effondrement donnée par le modèle différences finies concorde avec la valeur mesurée. Avec les mêmes paramètres, une viscosité

considérée comme constante et la prise en compte des grands déplacements, notre modèle réduit d'ordre 6 (4 modes d'amortissements, 1 mode mécanique), ainsi que celui de Hung *et al.* de même ordre prédisent une tension d'effondrement de 9.02V. Les valeurs des temps d'effondrements pour différentes tensions échelon appliquées pour le modèle différences finies de Gupta *et al.*, notre modèle réduit et le modèle réduit de Hung sont données à la Figure 3-25.



**Figure 3-25** Temps d'effondrement fonction de la tension échelon appliquée.

On remarque que la dynamique du micro-interrupteur est mal prédite pour des tensions proches de la tension d'effondrement, ce sur une plage de tension plus importante que pour le cas de Hung *et al.* (cf §3.2.5.1a). Les erreurs sur les temps d'effondrements sont sensiblement les mêmes pour les deux modèles réduits. Les résultats s'améliorent quand la tension appliquée augmente. La différence par rapport au §3.2.5.1a est que les grands déplacements sont pris en compte. On a vérifié que le modèle grand déplacement issu de la méthode de Galerkin (§3.2.2.1.) donne de bons résultats par rapport à un code différences finies de (3-9a), ce sur l'actionnement d'un micro-interrupteur. C'est donc que le modèle grands

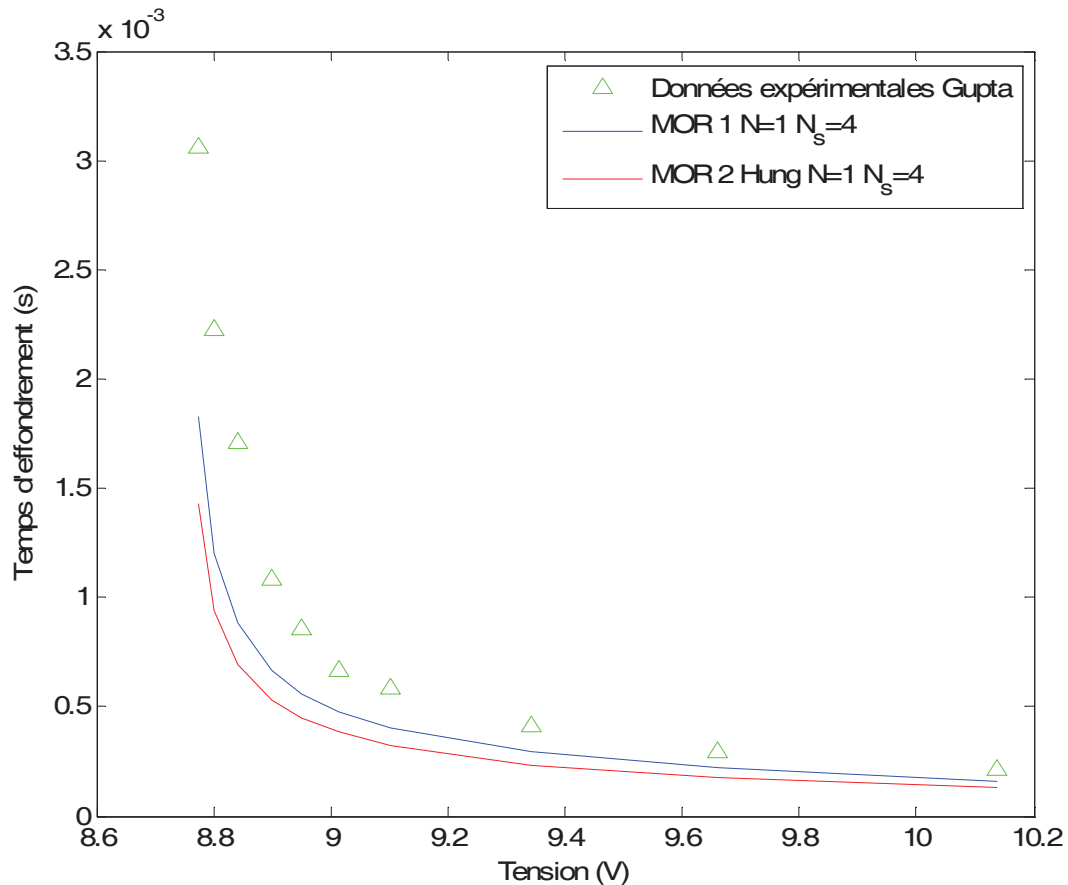


déplacements de Gupta *et al.* doit différer de celui de (3-9a). Des recherches sont à mener sur ce sujet.

### **3.2.5.2. Données expérimentales**

Les grandeurs caractéristiques du micro-interrupteur sont les mêmes que pour les données de Gupta *et al.* ci-dessus. Son modèle différences finies ne prenait pas en compte le régime de Knudsen et il ajustait la valeur de la compression résiduelle de façon à ce que la tension d'effondrement de son modèle différences finies colle avec la tension d'effondrement expérimentale. On va effectuer la même démarche ici. Dans notre modèle réduit et celui de Hung *et al.*, on prend en compte et les grands déplacements, et le régime de Knudsen. On ajuste la valeur de la tension résiduelle à  $S_0 = -3.74\text{MPa}$  de façon à ce que la tension d'effondrement vaille bien 8.76V, ce pour les deux modèles. On remarque que notre modèle donne des résultats un peu plus proches des données expérimentales que le modèle de Hung *et al.*, les erreurs restant toutefois assez importantes. De même que précédemment les résultats sont meilleurs pour des tensions d'actionnement plus importantes.

On peut expliquer les erreurs par la non prise en compte des pertes au niveau des ancrages de la poutre [Hung 1999], un modèle de la viscosité trop simplifié [Fukui 1988] et la non prise en compte des effets de bords au niveau électrostatique. D'après [Leus 2004] on peut estimer l'erreur sur la valeur de la capacité comme étant comprise entre 10% et 20%.



**Figure 3-26** Comparaison des valeurs des temps d'effondrement simulées par rapport aux temps d'effondrement expérimentaux de Gupta *et al.*. La valeur de la tension résiduelle est ajustée à  $S_0 = -3.74\text{MPa}$ .

### 3.3. Conclusion

On a, dans un premier temps, décrit le principe de fonctionnement d'un micro-interrupteur MEMS. On a ensuite détaillé les différents phénomènes physiques régissant son comportement dont le « squeeze film damping » régi par l'équation de Reynolds traitée au chapitre 2. On a ensuite rappelé différents résultats de la littérature sur la résolution de ce système couplé électrostatique/mécanique/fluidique. On s'est notamment intéressé à la réponse fréquentielle du système couplé mécanique-fluidique renseignant sur l'influence du « squeeze-film damping » sur le système.

On a ensuite établi un modèle d'ordre réduit couplé du micro-interrupteur à contact capacitif. La partie fluidique est basée sur l'équation de Reynolds avec l'hypothèse des petites variations de pression et sur laquelle on a appliqué un changement de variable décrit au chapitre 2. La possibilité d'inclure l'effet de rarefaction du gaz par la prise en compte d'une viscosité effective est donnée par ce modèle. Le modèle mécanique est basé sur l'équation d'Euler-Bernoulli pour laquelle les grands déplacements peuvent être pris en compte.

L'équation de Reynolds modifiée est projetée sur les modes propres du Laplacien, alors que l'équation d'Euler-Bernoulli est projetée sur ses modes propres. La validation de ce modèle a été faite par comparaison à un modèle différences finies et à des résultats de la littérature. On a aussi donné, pour comparaison, les résultats du modèle de Hung *et al.* [Hung 1999] qui résout l'équation de Reynolds sans hypothèses particulières selon la méthode de Galerkin avec comme base de projection des modes issus de la décomposition propre orthogonale. On a aussi dans certains cas présenté les résultats de ce modèle pour une base constituée des modes propres du Laplacien.

La comparaison à des modèles différences finies valide la méthode de réduction d'ordre de modèle qu'est la méthode de Galerkin impliquant le choix d'une base particulière. On a dans un premier temps comparé les résultats à ceux d'un code différences finies avec l'hypothèse des petites variations de pression. Les résultats de notre modèle réduit sont parfaitement satisfaisants. On a ensuite comparé à des résultats de la littérature pour laquelle l'hypothèse des petites variations de pression n'est pas faite. La comparaison aux résultats de Rewienski *et al.* valide parfaitement notre modèle. Par contre la comparaison par rapport aux codes différences finies de Hung *et al.* révèle une discordance quant aux résultats sur la modélisation de la structure actionnée par des tensions très proches de la tension d'effondrement. Les résultats restent toutefois dans l'ensemble parfaitement corrects. Enfin, la comparaison aux données de Gupta *et al.* révèle d'importantes erreurs sur les temps d'effondrement pour des tensions également proche de la tension d'effondrement. Ces erreurs sont beaucoup plus importantes que pour le cas de Hung *et al.*. On peut essayer de l'expliquer par le fait que les grands déplacements sont pris en compte. Le modèle grand déplacement (3-9a) semble donc être différent du modèle différences finies de Gupta *et al.* sur lequel on n'a pas de précisions particulières.

La comparaison à des résultats expérimentaux valide le modèle constitué du système d'équations (cf §3.2.1) et la méthode de réduction d'ordre de modèle. Les résultats sont satisfaisants. On peut expliquer les erreurs par la non prise en compte des pertes au niveau des ancrages de la poutre [Hung 1999], un modèle de la viscosité trop simplifié [Fukui 1988] et la non prise en compte des effets de bords au niveau électrostatique.

## Chapitre 4      **Evaluation des termes non linéaires**

### **4.1. Introduction**

Le modèle réduit présenté au §3.2.2.3 du chapitre 3 nécessite le calcul à chaque pas de temps d'intégrales dépendant de manière non triviale des coordonnées modales. Certaines de ces intégrales correspondent au modèle fluide correspondant à l'équation de Reynolds, les autres à la force électrostatique et au terme de raideur lié aux grands déplacements de la poutre. Il serait intéressant comme présenté au §1.3.3.2 d'arriver à exprimer la projection de la force fluide sur le premier mode mécanique comme une fonction des coordonnées modales mécaniques. On verra qu'en effet, sous certaines hypothèses relatives aux dimensions du dispositif et dans le cas « incompressible », on peut trouver une expression analytique de la projection de cette force. Lorsque ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on sera obligé d'avoir recours à une technique numérique de tabulation/interpolation. Dans le cas où on ne peut plus considérer l'écoulement comme incompressible, on montrera qu'il n'existe plus de relation simple entre la force fluide et les coordonnées modales vitesse et déplacement. On devra alors utiliser le modèle réduit complet présenté au §3.2.2.3 du chapitre 3 qui nécessite le calcul des intégrales mentionnées précédemment. On montrera que, dans ce cas, l'utilisation de la méthode de Rewiński (§1.3.3.3) permet de réduire fortement le coût d'évaluation de ce modèle. On appliquera aussi cette méthode au code différences finies couplé présenté au §3.2.4.1a. Enfin, on proposera une méthode alternative s'inspirant de la méthode de Rewiński et tirant parti de la nature particulière du modèle réduit.

### **4.2. Approximation globale de la force fluide**

On cherche ici à exprimer la force fluide projetée sur le premier mode mécanique  $F_{flu}$  comme une fonction des coordonnées modales mécaniques déplacement et vitesse. On montrera que sous l'hypothèse d'une poutre étroite, on peut trouver une expression analytique de la projection de cette force  $F_{flu}$ . Dans le cas d'une poutre plus large cette expression n'est plus valable. On va alors tabuler les valeurs de cette force pour un maillage régulier de l'espace des coordonnées modales mécaniques position et vitesse. Lors de la simulation la valeur de  $F_{flu}$  sera déterminée par interpolation linéaire des valeurs tabulées.

En ce qui concerne la validation de ces deux modèles, on traitera l'exemple d'une poutre de longueur 610  $\mu\text{m}$ , étroite dans un premier temps de largeur 40  $\mu\text{m}$  puis plus large dans un deuxième temps de largeur 200  $\mu\text{m}$ . On travaillera sur deux exemples, celui de l'actionnement du micro-interrupteur, et celui plus théorique de l'application d'une force uniforme sinusoïdale. On comparera les résultats du modèle basé sur l'expression analytique approchée, du modèle basé sur l'interpolation linéaire de valeurs tabulées, et celui du modèle réduit décrit dans le chapitre 3.

#### 4.2.1. Approximation analytique de la force fluidique pour les poutres étroites

On rappelle l'équation de Reynolds avec l'hypothèse des petites variations de pression et dans le cas incompressible :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{G^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{G^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (4-1)$$

Les dispositifs de type micro-interrupteurs étant en général beaucoup plus longs que larges, on peut faire l'hypothèse que les variations de la pression selon  $x$  sont négligeables par rapport aux variations selon  $y$ . De plus, la valeur de  $G$  est indépendante de  $y$ . L'équation (4-1) devient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{G^3} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (4-2)$$

En intégrant deux fois cette équation tenant compte des conditions limites « bords libres » selon la longueur, on obtient l'expression de la pression  $p(x,y)$ . Intégrant cette expression sur la largeur, on obtient l'expression de la force linéique :

$$f_{flu}(x) = -\frac{\mu W^3}{(G_0 - w)^3} \dot{w} \quad (4-3)$$

En projetant cette force sur le premier mode propre, on obtient :

$$\left\langle f_{flu} \mid w_1 \right\rangle = -\mu \frac{W^3}{G_0^3} \dot{a}_1 \int_0^L \frac{w_1^2}{\left(1 - a_1 \frac{w_1}{G_0}\right)^3} dx \quad (4-4)$$

L'évaluation de cette intégrale pour les grandes valeurs de  $a_1$  est coûteuse. En normalisant  $w_1$  de sorte que  $a_1 = 1$  corresponde à un déplacement égal à l'écart initial au substrat, l'intégrale tend vers l'infini quand  $a_1$  tend vers 1. On peut donc en chercher une approximation analytique sous la forme :

$$I(a_1) = \int_0^L \frac{w_1^2}{\left(1 - a_1 \frac{w_1}{G}\right)^3} dx \approx C \frac{1 + \kappa a_1}{(1 - a_1)^n}. \quad (4-5a)$$

$$\text{où } C = \int_0^L w_1^2 dx \quad (4-5b)$$

Les paramètres du modèle peuvent par exemple être déterminés en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\{\hat{n}_\varepsilon, \hat{\kappa}_\varepsilon\} = \arg \min_{n, \kappa} \int_0^{(1-\varepsilon)} \left[ C \frac{1 + \kappa a_1}{(1 - a_1)^n} - I(a_1) \right]^2 da_1. \quad (4-6)$$

Pour  $\varepsilon=10^{-3}$ , on trouve  $n=2.5001$  et  $\kappa=0.0147$  ce qui donne une erreur relative maximale de 0.1% sur l'étendue de l'écart initial au substrat. Si on arrondit  $n$  à 2.5 et  $\kappa$  à 0, on trouve une erreur de 0.15% ce qui est très acceptable. On a donc comme expression finale approchée de la force de pression projetée sur le premier mode propre mécanique :

$$F_{flu} \approx -\mu C \frac{W^3}{G_0^3} \frac{1 + \kappa a_1}{(1 - a_1)^n} \dot{a}_1 \quad (4-7)$$

On vérifiera la pertinence de cette approximation au § 4.2.2.1 par comparaison aux résultats pour une poutre large en ce qui concerne la valeur de  $F_{flu}$  ainsi qu'au § 4.2.3 où l'on présentera les résultats de simulation.

#### 4.2.2. Approximation numérique de la force fluidique pour les poutres larges

Lorsque la poutre est large, il n'est plus possible de résoudre analytiquement (4-1), comme au paragraphe précédent. En revanche, on peut supposer qu'il existe toujours une relation simple entre les coordonnées modales et la force fluidique projetée sur le premier mode. En particulier, on va montrer qu'on peut chercher une approximation de  $F_{flu}$  sous la forme :

$$F_{flu} \approx \frac{F(a_1, \dot{a}_1)}{(1 - a_1)^{2.5}}. \quad (4-8)$$

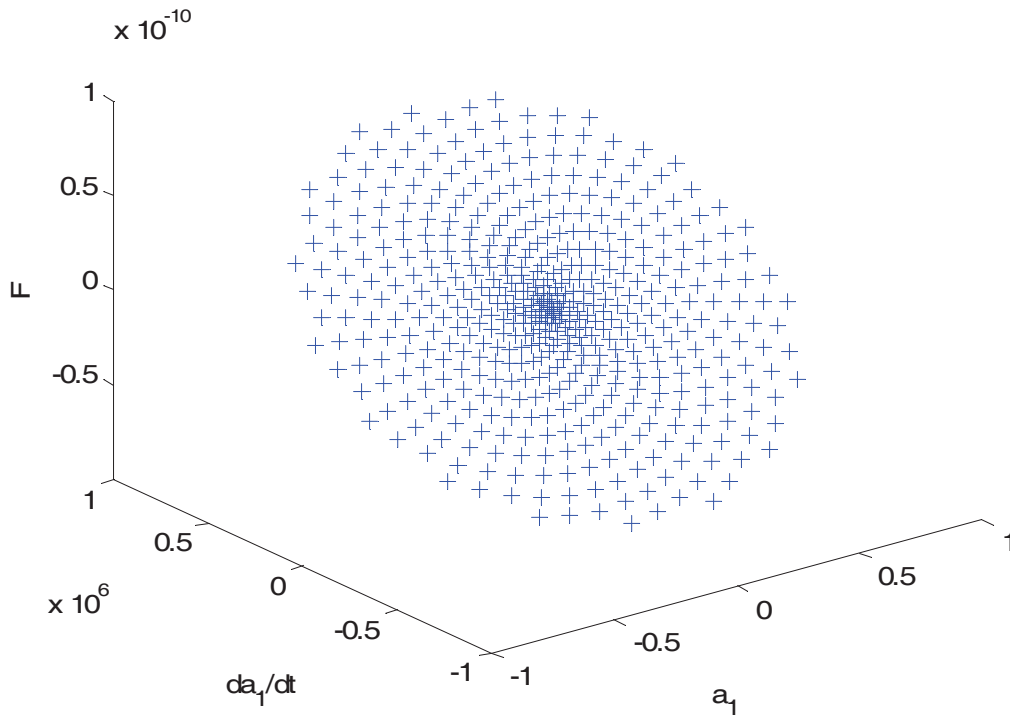
La détermination de  $F$  peut se faire à partir de données d'apprentissage, générées en résolvant numériquement l'équation (4-1) dans laquelle la valeur de  $G(x,t)$  est imposée. On pourra vérifier que pour une poutre étroite  $F(a_1, \dot{a}_1)$  ne dépend que très faiblement de  $a_1$  et qu'elle est linéaire en  $\dot{a}_1$ .

#### 4.2.2.1. Trajectoire d'apprentissage.

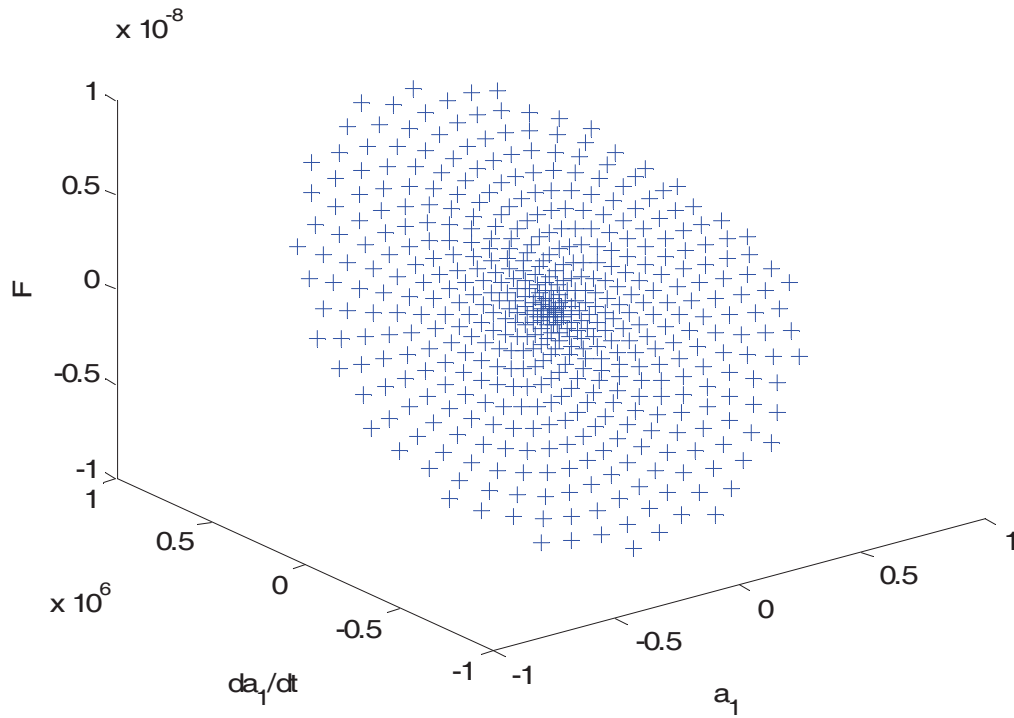
Pour générer les données d'apprentissage, on utilise un code différences finies de l'équation (4-1). On choisit une fréquence d'excitation de la poutre et on fait varier l'amplitude du mouvement au cours du temps afin de couvrir l'espace des phases qui nous intéresse. La coordonnée modale mécanique a alors l'expression suivante :

$$a_1(t) = \left( Coeff_1 + (Coeff_2 - Coeff_1) \frac{t}{T_{fin}} \right) \sin(\omega t) \quad (4-9)$$

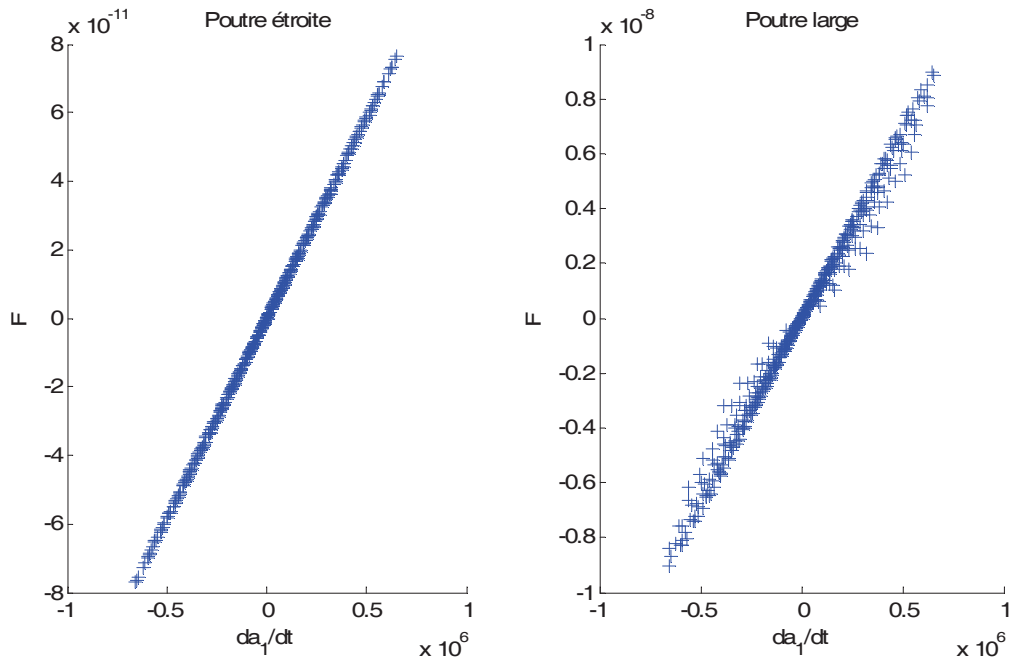
où  $Coeff_1$  et  $Coeff_2$  sont respectivement l'amplitude initiale et l'amplitude finale du mouvement exprimée comme fraction de l'écart initial au substrat et que l'on fixe respectivement à 0.01 et 0.9. On choisit une fréquence d'excitation de 120 kHz. Ces données sont générées dans deux cas de figure : une poutre d'une largeur égale à 40  $\mu\text{m}$  (poutre « étroite ») et une poutre d'une largeur égale à 200  $\mu\text{m}$  (poutre « large »), de manière à mettre en évidence l'influence de la largeur de la poutre sur la fonction  $F$ . Les résultats sont présentés aux figures 4-1, 4-2 et 4-3.



**Figure 4-1** Fonction  $F$  des coordonnées modales mécanique position et vitesse pour la poutre étroite.



**Figure 4-2** Fonction  $F$  des coordonnées modales mécanique position et vitesse pour la poutre large.



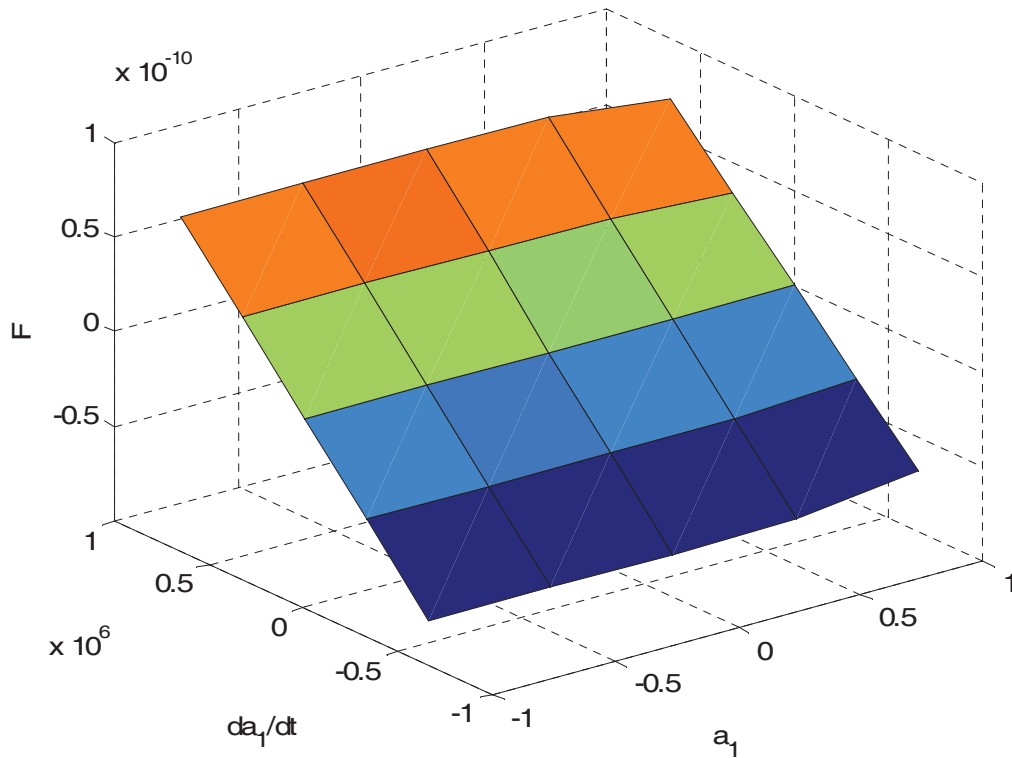
**Figure 4-3** Fonction  $F$  de la coordonnée modale vitesse pour les poutres étroite et large.

On vérifie (Figure 4-3) que, pour une poutre étroite, la fonction  $F_{flu}$  a bien la forme (4-7) puisque  $F$  ne dépend que de la coordonnée modale vitesse  $\dot{a}_1$  et est linéaire en  $\dot{a}_1$ . Pour une poutre large ce n'est plus le cas.

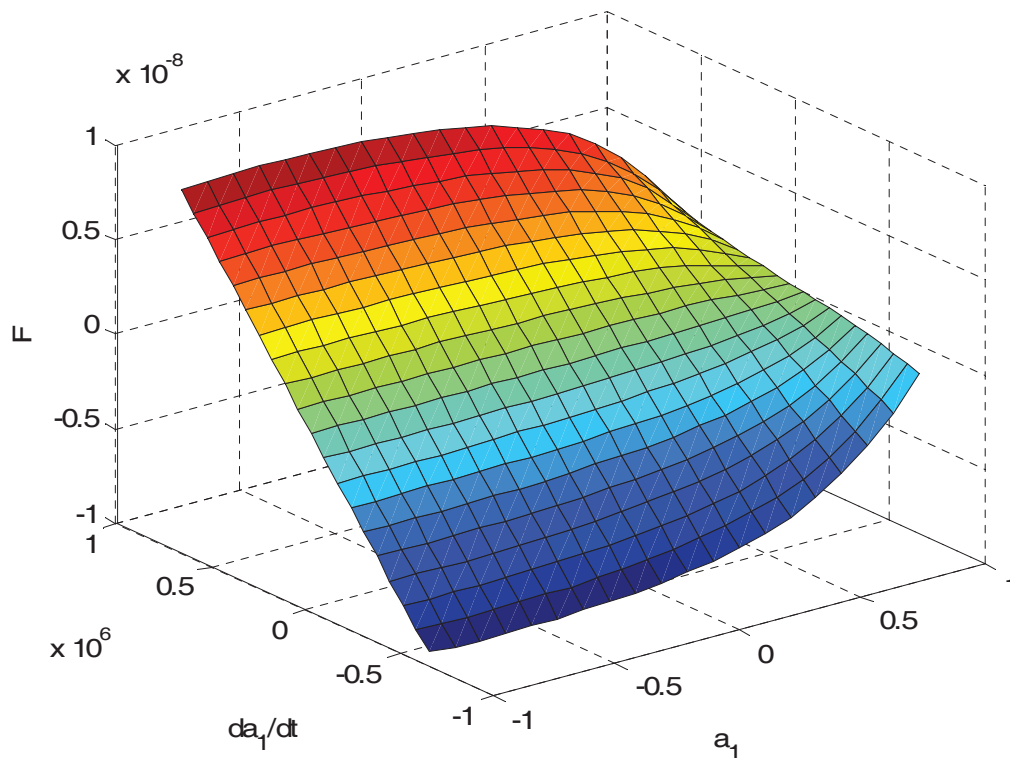


#### 4.2.2.2. Approximation de $F$

On va chercher à approximer  $F$  par un modèle linéaire par morceau. Pour cela on va estimer sa valeur sur un maillage régulier par la méthode du krigage [Vasquez 2005]. Pour une poutre étroite, la fonction  $F$  étant quasi linéaire en  $\dot{a}_1$ , on utilise seulement 5 points selon la dimension  $a_1$  et 5 points selon  $\dot{a}_1$ . Pour une poutre large on utilisera 20 points selon chacune des dimensions, soit 400 points de maillage. Les surfaces obtenues dans les deux cas sont représentées aux figures 4-4 et 4-5.



**Figure 4-4** Surface obtenue pour la fonction  $F$  par estimation des valeurs par krigage pour la poutre étroite.



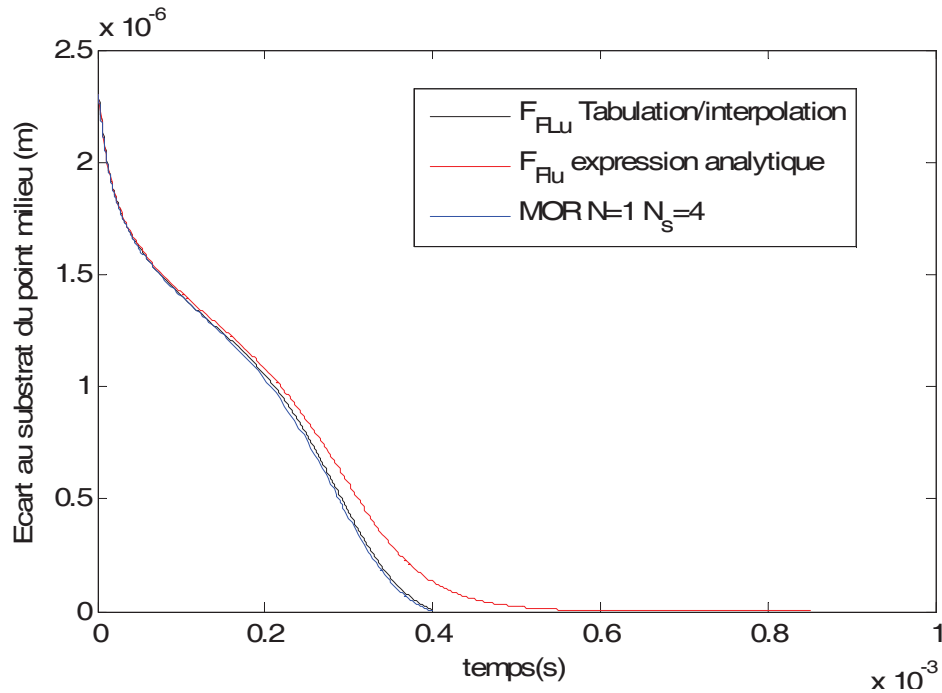
**Figure 4-5** Surface obtenue pour la fonction  $F$  par estimation des valeurs par krigeage pour la poutre large.

On constate de nouveau que pour des valeurs de  $a_1$  proches de 1 (poutre proche du substrat), la fonction  $F$  n'est plus linéaire en  $\dot{a}_1$ . Le temps CPU pour l'estimation de la première surface est de 7min 35 s et de 5 min 43 s pour la deuxième surface.

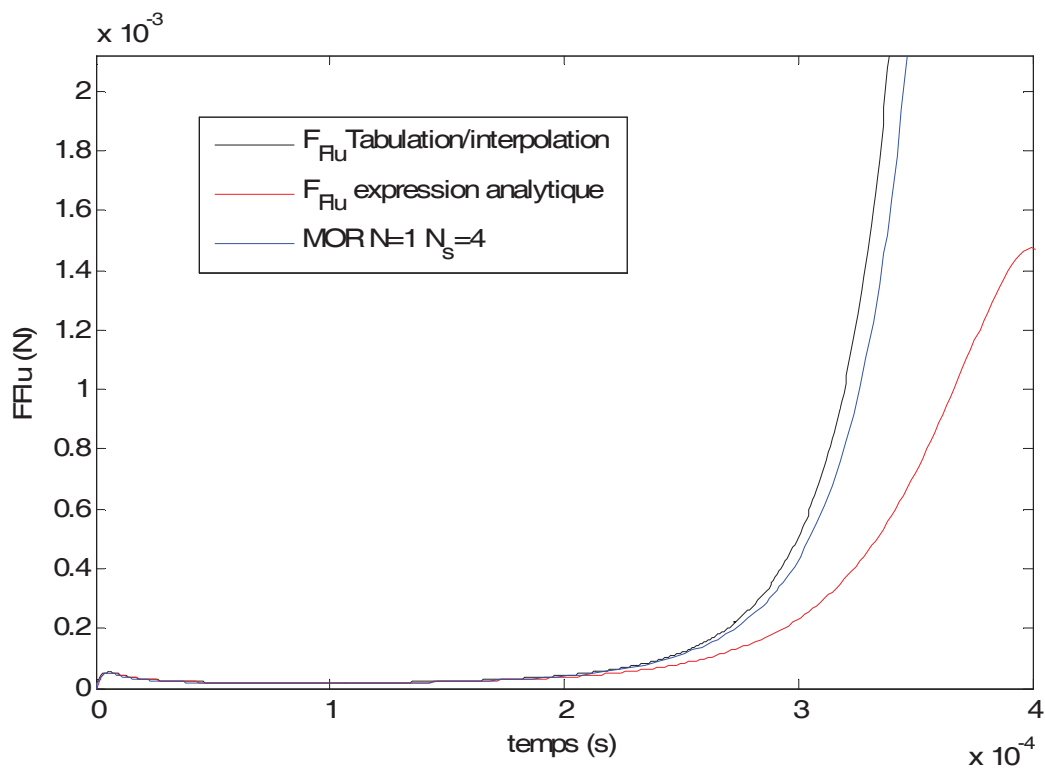
### 4.2.3. Résultats

#### 4.2.3.1. Actionnement électrostatique

On applique une tension échelon de 9.5 V afin que la poutre vienne coller au substrat. On regarde dans un premier temps la réponse de la poutre étroite. Le modèle numérique basé sur la tabulation des valeurs de  $F$  donne le temps d'effondrement exact. L'expression analytique approchée (4-7) donne un moins bon résultat. La poutre vient coller au substrat avec une vitesse quasi nulle contrairement aux résultats du modèle réduit où la vitesse tend vers l'infini. Ceci peut probablement s'expliquer par le fait que l'hypothèse des variations de pressions selon la longueur négligeables par rapport aux variations de pressions selon la largeur n'est plus valable quand la poutre se rapproche trop du substrat. En effet, un pic de pression se forme alors au niveau du milieu de la poutre.



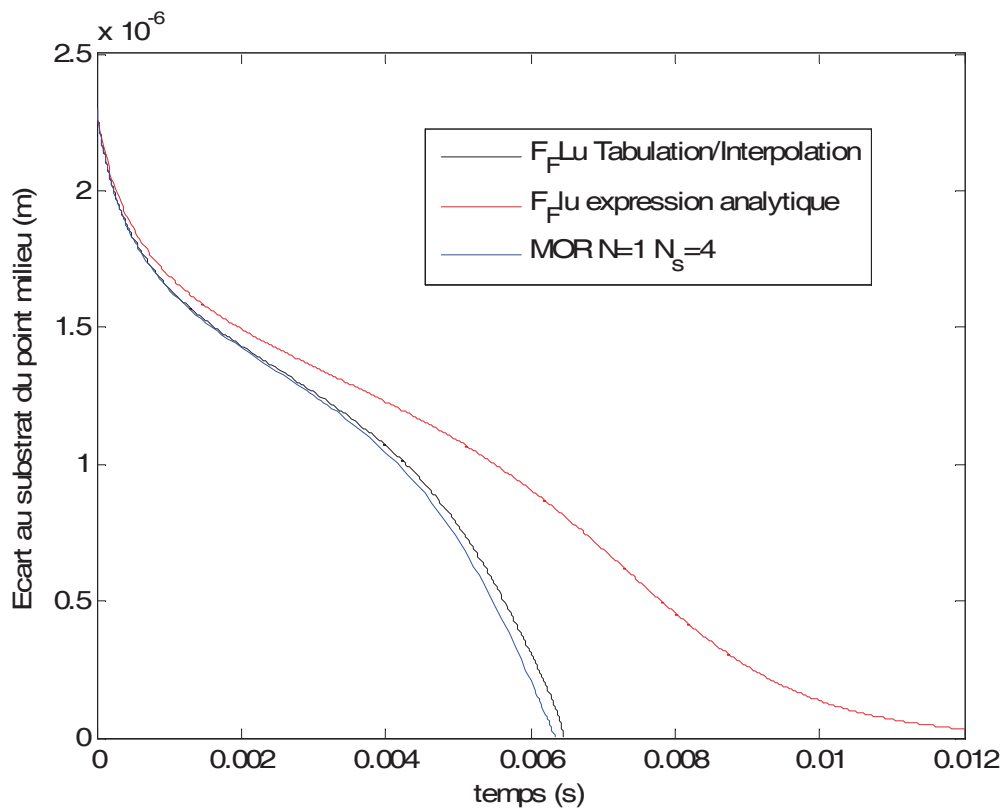
**Figure 4-6** Réponse à un échelon de 9.5 V pour la poutre étroite pour les trois modèles proposés, le modèle réduit projeté, l'expression analytique approchée de  $F_{flu}$ , et le modèle où les valeurs de  $F$  sont tabulées.



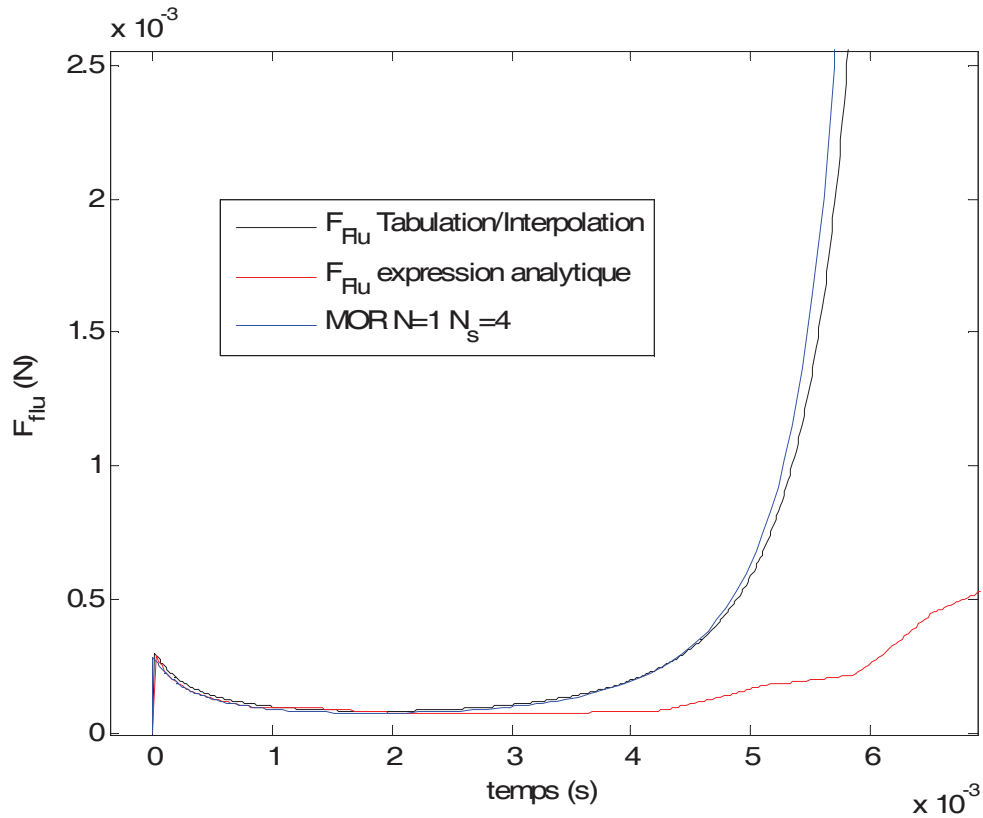
**Figure 4-7** Force de pression projetée sur le premier mode mécanique pour la réponse à une tension échelon de 9.5V pour les trois modèles proposés.

On constate sur la figure 4-6 que pour le modèle basé sur l'expression analytique de  $F_{flu}$  la vitesse diminuant sur la fin de la simulation la variation de pression aussi, elle ne tend plus vers l'infini.

On regarde maintenant la réponse de la poutre large à un échelon de tension de 9.5V. L'expression analytique est trop simplifiée dans le cas d'une poutre raisonnablement large. On constate par contre que quand on tabule les valeurs de la fonction  $F$ , les résultats sont parfaitement corrects. Le temps pour cette simulation est de 2 min pour le modèle réduit simplement projeté et de 40 s pour le modèle réduit avec approximation de la fonction de pression, soit un gain d'un facteur trois.



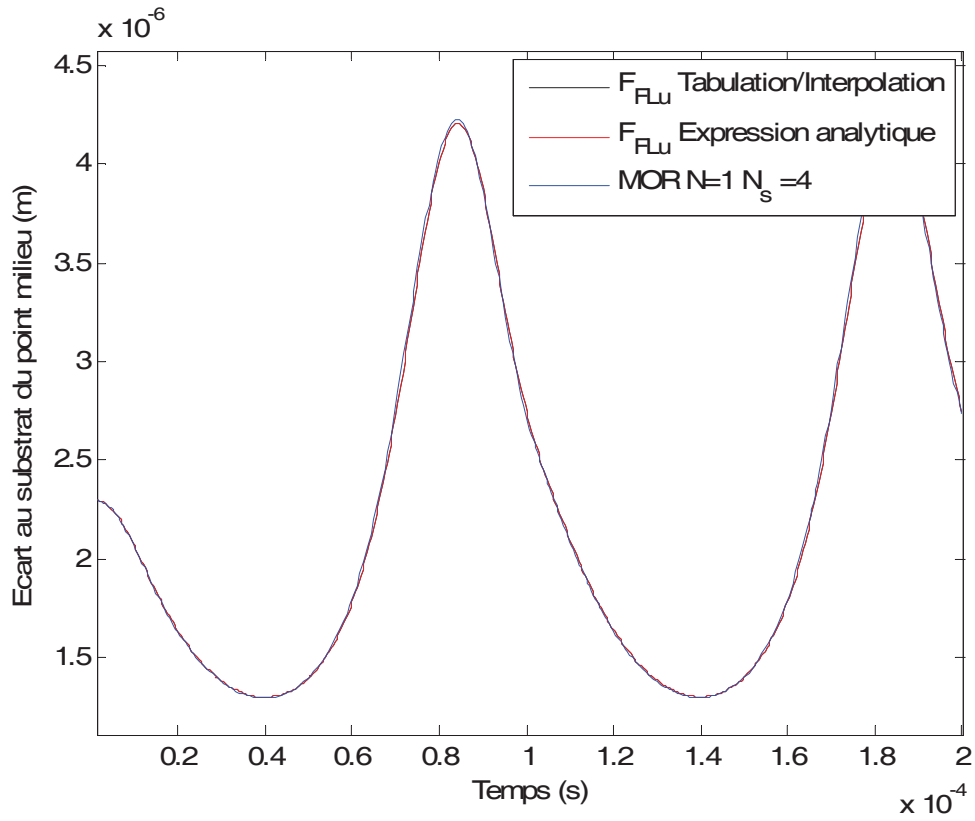
**Figure 4-8** Réponse de la poutre large à une tension échelon de 9.5V pour les trois modèles proposés.



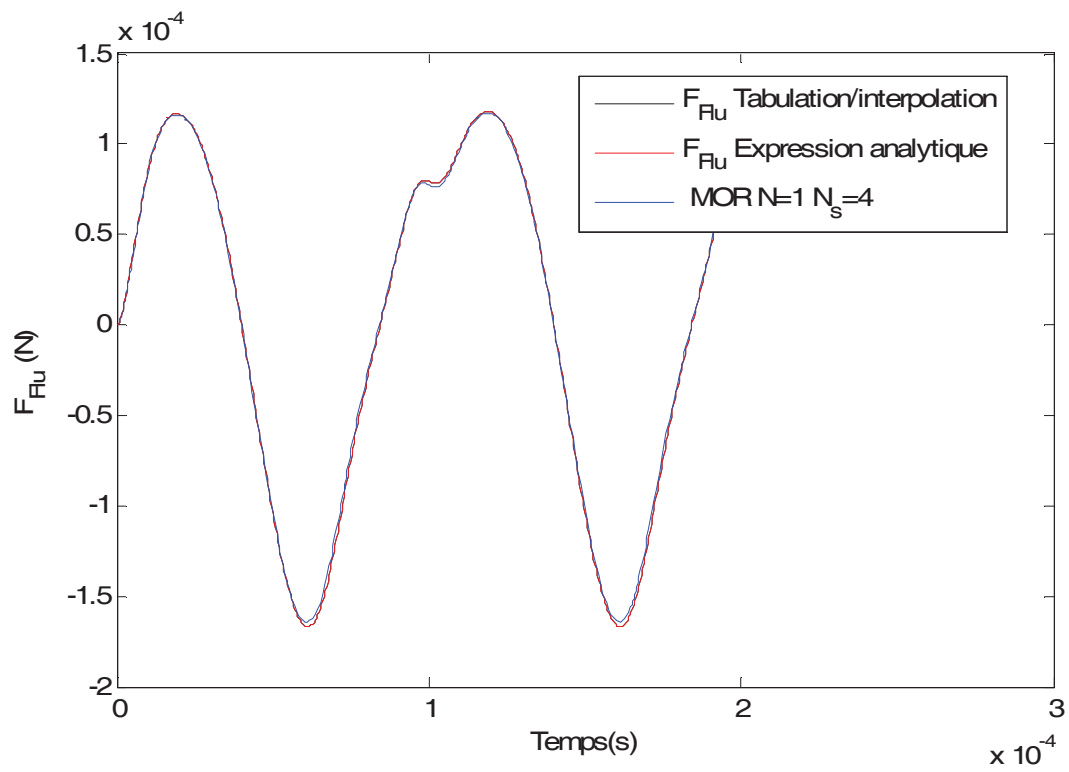
**Figure 4-9**  $F_{Flu}$  pour la réponse de la poutre large à une tension échelon de 9.5V pour les trois modèles proposés.

#### 4.2.3.2. Force uniforme sinusoïdale

On applique une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $10^{-2}$  N/m et de fréquence 10 kHz à la poutre étroite. Les résultats des trois modèles concordent parfaitement. Dans ce cas là, l'expression analytique approchée est suffisante.

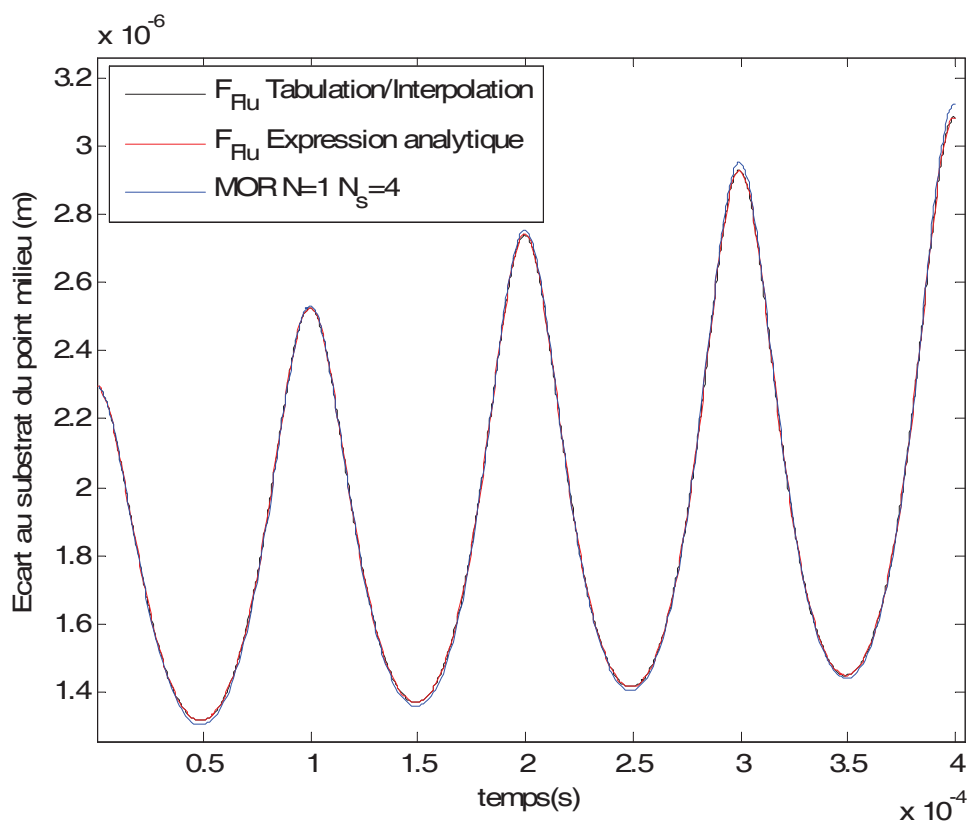


**Figure 4-10** Réponse de la poutre de largeur  $40\text{ }\mu\text{m}$  à une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $10^{-2}\text{ N/m}$  et de fréquence  $10\text{kHz}$ .

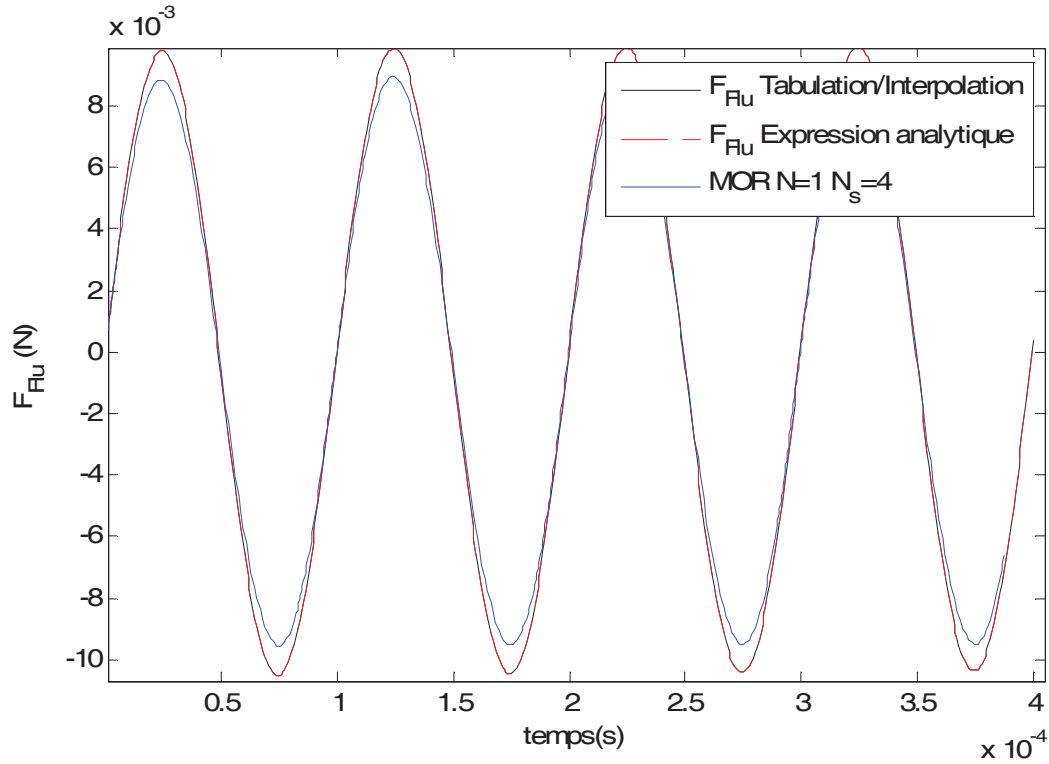


**Figure 4-11**  $F_{\text{Flu}}$  pour une poutre de largeur  $40\text{ }\mu\text{m}$  soumise à une force uniforme sinusoïdale d'amplitude  $10^{-2}\text{ N/m}$  et de fréquence  $10\text{kHz}$ .

On applique maintenant une force uniforme sinusoïdale d'amplitude 0.5 N/m et de fréquence 10 kHz à la poutre de largeur 200  $\mu\text{m}$ . On fera remarquer que l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus tout à fait valable dans ce cas là. La référence sera un modèle réduit basé sur Reynolds incompressible dont la dérivation est détaillée dans l'annexe G. On constate que les deux modèles considérant  $F_{\text{Flu}}$  comme une fonction des coordonnées modales donnent les mêmes résultats. On est dans la zone de la surface (cf figure 4-5) où  $F$  est encore linéaire en  $\dot{a}_1$ . Il est difficile par ce mode d'actionnement d'atteindre la zone non-linéaire car le film d'air ne permet pas de se rapprocher assez du substrat. Les résultats sur le déplacement des trois modèles concordent presque parfaitement, il y a une erreur de 10% sur  $F_{\text{Flu}}$  entre le modèle réduit et les deux modèles basés sur les fonctions.



**Figure 4-12** Réponse d'une poutre de largeur 200  $\mu\text{m}$  à une excitation sinusoïdale d'amplitude 0.5N/m et de fréquence 10 kHz.



**Figure 4-13**  $F_{Flu}$  pour une poutre de largeur  $200 \mu m$  excitée sinusoïdalement par une force uniforme d'amplitude  $0.5 N/m$  et de fréquence  $10 kHz$ .

#### 4.2.4. Conclusion

On a pu constater que dans un certain domaine de fonctionnement à préciser l'expression analytique approchée de  $F_{Flu}$  donnait de bons résultats pour une poutre étroite ou large. Pour la simulation de l'effondrement de la structure cette expression approchée ne suffit pas même pour la poutre étroite. Avec cette expression la poutre vient coller au substrat avec une vitesse quasi nulle ce qui allonge artificiellement le temps d'effondrement. L'approche tabulant les valeurs de  $F$ , fonction à partir de laquelle on peut atteindre  $F_{Flu}$ , donne de des résultats parfaits dans le cas de la poutre étroite et large pour les deux types de simulations c'est à dire l'effondrement de la structure et l'application d'une force uniforme sinusoïdale. Pour le dernier exemple, c'est-à-dire l'application d'une force uniforme sinusoïdale à une poutre large, on a atteint la limite de validité du modèle incompressible. On montre que dans le cas compressible, on ne peut exprimer  $F_{Flu}$  comme une fonction des coordonnées modales mécaniques position et vitesse. En effet si on réalise plusieurs simulations d'apprentissage à des fréquences différentes, on trouve que pour une même valeur des coordonnées modales  $F_{Flu}$  peut prendre des valeurs différentes. On doit alors avoir recours au modèle présenté au §3.2.2.3 du chapitre 3 nécessitant le calcul d'intégrales fonctions non triviales des



coordonnées modales. On va, dans ce qui suit, utiliser la méthode de [Rewiński 2003] qui va consister à linéariser par morceau les fonctions régissant la dynamique afin d'éviter le calcul des dites intégrales.

### **4.3. Modèle linéarisé par morceaux [Rewiński 2003 B]**

On va utiliser la méthode décrite par Rewiński *et al.* ([Rewiński 2003 B], [Rewiński 2005]) que l'on a résumée en détail dans le § 1.3.3.3 du chapitre 1. On va appliquer cette méthode au modèle réduit du chapitre 3 (§3.2.2.3) quelque peu modifié et au modèle différences finies couplé décrit également au chapitre 3 (§3.2.4.1).

#### **4.3.1. Méthode [Rewiński 2003 B]**

Deux des enjeux de cette méthode sont le choix des points de linéarisation et le calcul des poids.

##### **4.3.1.1. Choix des points de linéarisation**

On rappelle que l'on choisit les points de linéarisation le long d'une trajectoire d'apprentissage. On définit le premier point de linéarisation comme étant le point d'équilibre du système. On parcourt la trajectoire d'apprentissage, quand l'un des états est jugé trop éloigné de tous les points de linéarisation existants il est défini comme étant un nouveau point de linéarisation et ainsi de suite.

On fera remarquer que pour un modèle couplé, les variables d'état sont de natures très différentes que l'on considère les variables de l'espace physique ou les coordonnées modales. Ainsi, le calcul d'une distance sur l'état complet n'est pas forcément pertinent. D'autre part, l'importance de certains phénomènes peut être négligée du fait de la faible valeur relative de certaines des variables. Dans l'exemple du micro-interrupteur du chapitre 3, la coordonnée modale vitesse étant de l'ordre de  $10^8$  fois plus grande que celle correspondant au déplacement et de  $10^5$  fois plus grande que les coordonnées de l'amortissement, ce sont les variations de celle-ci qui vont déterminer l'emplacement des points de linéarisation. Ainsi on commence par normaliser les variables par domaine pour le calcul des distances servant au choix des points de linéarisation. On peut aussi ne pas exactement les normaliser, mais ajuster le poids de chacun des domaines dans le choix des points de linéarisation par un coefficient. On utilisera cette méthode de choix des points avec normalisation des variables pour le modèle réduit du chapitre 3 légèrement modifié et le modèle différences finies.

[Rewiński 2003 B] choisit les points de linéarisation sur l'état complet. On propose ici de découpler les domaines pour le choix des points de linéarisation. Ceci améliore notamment la pertinence de la valeur d'une distance qui est alors calculée sur des variables de même nature. On obtient alors une série de points « partiels » par domaine. Lors de la simulation il s'agira alors de trouver le point le plus proche correspondant à une combinaison des points de linéarisation « partiels ». On pourrait aussi choisir les points par distance sur l'état complet, découpler le résultat par domaine et obtenir des séries de  $n$  points de linéarisation « partiels », et que l'on s'autorise à recombinaison entre eux de la même manière que précédemment. A priori, il paraît plus pertinent de découpler les domaines dès le choix des points de linéarisations. On remarque que du fait du découplage, la normalisation des variables d'état n'est plus nécessaire pour le choix des points de linéarisation. On appliquera cette méthode pour le modèle réduit du chapitre 3 quelque peu modifié. Le détail de la procédure sera alors explicité.

#### 4.3.1.2. Calcul des poids

##### *a. Modèle basé sur 1 point de linéarisation*

On cherche le point de linéarisation le plus proche de l'état courant. On fixe le poids correspondant au point le plus proche à 1, les autres à 0.

Si les points de linéarisation ont été choisis par calcul de la distance à l'état complet, le résultat pour le point le plus proche sera le même que l'on normalise les variables ou pas. On choisit donc de ne pas les normaliser.

##### *b. Modèle basé sur le calcul des poids de [Rewiński 2003 B]*

La démarche utilisée par [Rewiński 2003 B] est plus complexe. Elle se base aussi sur le calcul des distances de l'état courant aux  $q$  différents points de linéarisation. La démarche est la suivante :

1) pour  $i = 0, \dots, (q-1)$  calculer  $d_i = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\|_2$

2) prendre  $m = \min_{i=0, \dots, q-1} (d_i)$

3) pour  $i = 0, \dots, (q-1)$  calculer  $\hat{p}_i = e^{-\beta d_i / m}$

4) normaliser  $\hat{p}_i$  au point d'évaluation

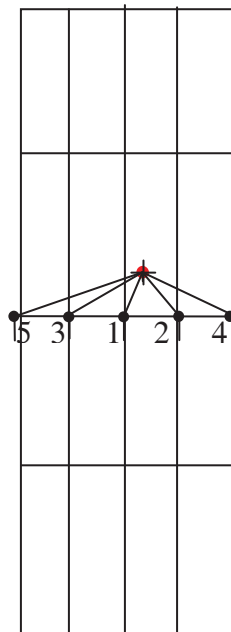
a) calculer  $S(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{q-1} \hat{p}_j(\mathbf{z})$

b) pour  $i = 0, \dots, (q-1)$ , faire  $p_i(\mathbf{z}) = \hat{p}_i(\mathbf{z}) / S(\mathbf{z})$

Le terme  $\beta$  est une constante positive que Rewiński *et al.* fixent. Pour une valeur importante de  $\beta$ , la valeur des poids varie plus vite avec l'état. La valeur de ces poids reste continue dans le temps, ce qui n'est pas le cas pour la démarche simple décrite au paragraphe ci-dessus.

On se pose ici de nouveau la question de la normalisation des variables. On considère que les points de linéarisation correspondent à la recombinaison de points partiels. Si les variables sont normalisées ou pas, cela changera la valeur relative des distances et donc l'importance des différents points de linéarisation. Si on cherche à les classer, le point le plus proche sera le même, par contre l'ordre des points qui ne sont pas les plus proches sera changé.

On va considérer un exemple en deux dimensions, l'abscisse concernera le domaine physique 1, l'ordonnée le domaine physique 2. La figure 4-1 représente le cas du calcul de distance sur variable non normalisées. La variable 2 en ordonnée est d'un ordre de grandeur supérieur à la variable 1 en abscisse. On voit qu'on va obtenir des poids d'à peu près même valeur, pour des valeurs de la variable 1 très différentes, la réalité du domaine 1 sera donc mal représentée par ces poids. La normalisation des variables est donc particulièrement pertinente pour l'utilisation de la méthode des poids de [Rewiński 2003].



**Figure 4-14** Classification des points de linéarisation

### 4.3.2. Linéarisation par morceaux d'un modèle réduit de micro-interrupteur

On va ici présenter les résultats de la linéarisation par morceaux d'un modèle réduit de micro-interrupteur quelque peu modifié par rapport au modèle réduit du chapitre 3. On présente donc le modèle de l'équation de Reynolds qui est utilisé ici, puis la construction du modèle linéarisé par morceaux puis les résultats par rapport au modèle réduit initial.

#### 4.3.2.1. Modèle réduit utilisé

Le modèle de l'équation de Reynolds utilisé ici est un peu différent dans la forme de sa résolution de celui présenté au chapitre 2. On se base ici sur un modèle de l'équation de Reynolds pour lequel la viscosité est considérée comme constante et pour lequel on a fait le changement de variable  $p = \varphi G^{-3/2}$  :

$$\Delta\varphi - \varphi \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} = \frac{12\mu}{G^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) \quad (4-10)$$

Par intégration par partie du membre de droite, on obtient :

$$\frac{12\mu}{G^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left( G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) = 12\mu \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( G^{-1/2} \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \right) - G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \frac{\partial G^{-3/2}}{\partial t} \right]. \quad (4-11)$$

On néglige le terme  $\frac{p}{P_0}$  devant 1 dans le deuxième terme, simplification que l'on n'avait pas

faite précédemment mais qui est valide pour des petites variations de pression:

$$G \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \frac{\partial G^{-3/2}}{\partial t} \approx G \frac{\partial G^{-3/2}}{\partial t} = -\frac{3}{2} G^{-3/2} \frac{\partial G}{\partial t} = 3 \frac{\partial G^{-1/2}}{\partial t}, \quad (4-12)$$

On remplace  $p = \varphi G^{-3/2}$  dans (4-11). Ainsi, l'équation de Reynolds transformée a la forme suivante :

$$\Delta\varphi - \varphi \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} = 12\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -2G^{-1/2} + \frac{G^{-2}\varphi}{P_0} \right) \quad (4-13)$$

Une fois projetée sur les modes propres du Laplacien  $\varphi_k$ ,  $k=1, \dots, N_s$  à valeurs propres  $\lambda_k^2$ , l'équation de Reynolds prend la forme du système de N EDOs suivant :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{s}) = \frac{d}{dt}\mathbf{c} + \mathbf{H}\mathbf{s} \quad (4-14a)$$

avec

$$c_l = 24\mu \langle G^{-1/2} | \varphi_l \rangle \quad (4-14b)$$

$$H_{kl} = -\lambda_k^2 \delta_{kl} - \left\langle \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad \text{où} \quad (4-14c)$$

$$A_{kl} = \frac{12\mu}{P_0} \langle G^{-2} \varphi_k | \varphi_l \rangle \quad (4-14d)$$

Le modèle couplé final a alors la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{c}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K} & 0 & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \\ 0 & 0 & \mathbf{H}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_e(\mathbf{a}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-15a)$$

avec

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (4-15b)$$

#### 4.3.2.2. Choix des points de linéarisation

$\mathbf{z}$  est le vecteur d'état (4-15b),  $\mathbf{a}$  les coordonnées modales mécaniques,  $\mathbf{s}$  les coordonnées de l'amortissement. Pour le choix des points de linéarisation sur l'état complet, on applique la procédure suivante :

1) initialisation :  $q = 0$   $\mathbf{z}_0$  point d'équilibre du système est choisi comme premier point de linéarisation

2) Pour un point  $\mathbf{z}$  de la trajectoire d'apprentissage,

a) calculer  $d_i = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\|_2$  pour  $i = 0, \dots, q-1$

si  $\forall i \ d_i > \alpha$  faire  $q = q + 1$ ,  $\mathbf{z}_q = \mathbf{z}$

retour à (2)

Pour le choix des points de linéarisation par découplage des domaines, on applique cette procédure aux différents domaines indépendamment. On ne considère qu'une partie de l'état correspondant aux coordonnées modales position, on obtient une série de  $q_1$  points de linéarisation partiels  $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q_1-1}\}$ . Dans un deuxième temps, on applique cette procédure aux coordonnées modales vitesses et on obtient une série de  $q_2$  points de linéarisation partiels  $\{\dot{\mathbf{a}}_0, \dot{\mathbf{a}}_1, \dots, \dot{\mathbf{a}}_{q_2-1}\}$  et ainsi de suite en regroupant les coordonnées modales de même type. On

peut ensuite combiner entre eux les points de linéarisation partiels afin d'obtenir les points de linéarisation base du modèle.

#### 4.3.2.3. Calcul de la valeur des fonctions et des jacobiens

Soient les fonctions **f** et **g** définies ci-dessous d'après l'équation (4-15a) :

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{c}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

et

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K} & 0 & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \\ 0 & 0 & \mathbf{H}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

**JG** et **JF** les jacobiens respectif des fonctions **g** et **f** ont alors la forme suivante :

$$\mathbf{JG} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ \mathbf{Q}(\mathbf{z}) & 0 & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

$$\mathbf{JF} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{z}) & 0 & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{z}) & 0 & \mathbf{H}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

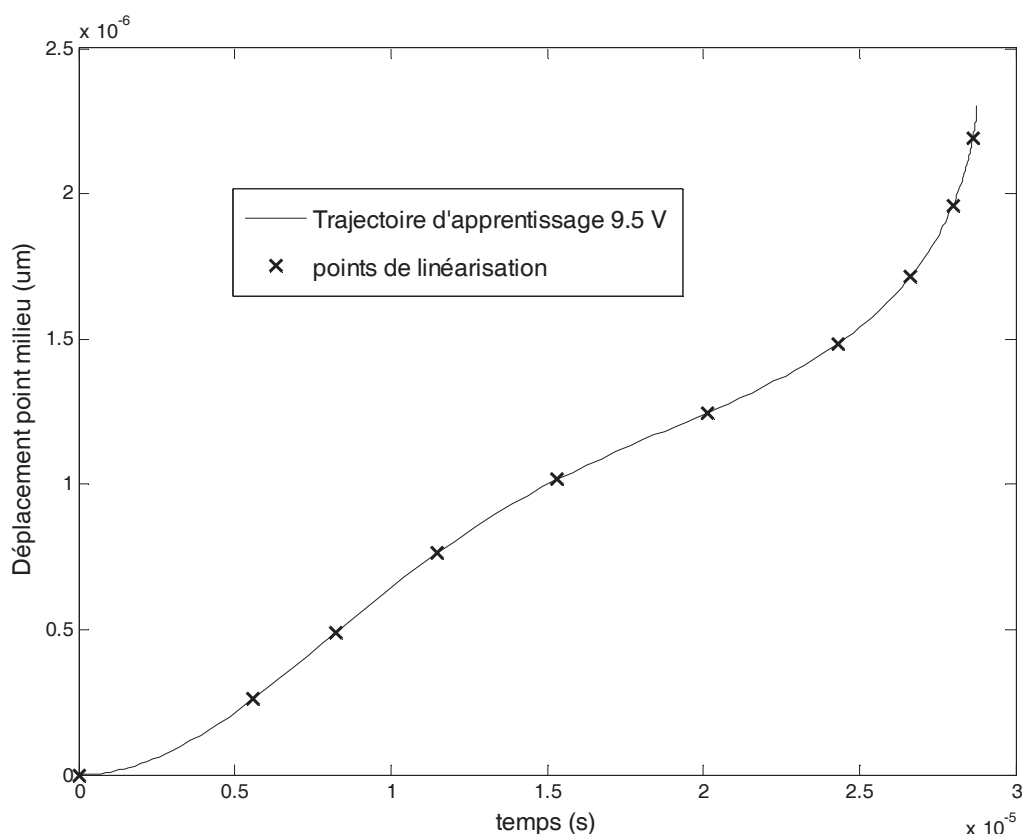
On trouvera en annexe F les expressions exactes des coefficients des matrices **Q(z)**, **C(z)** et **D(z)**.

#### 4.3.2.4. Résultats : trajectoire d'apprentissage=trajectoire de simulation.

On valide la linéarisation par morceaux de ce modèle par comparaison au modèle non-linéaire initial, résolu par l'outil ode15s de Matlab. On ne linéarise pas l'entrée, c'est-à-dire la force électrostatique. On utilisera aussi le solveur ode15s de Matlab pour intégrer dans le temps le modèle linéaire par morceaux.

On prend en compte 1 mode mécanique et 4 modes d'amortissement. On utilise la structure du §3.2.3.1 du chapitre précédent à la différence qu'on considère une largeur de 70 µm. On augmente ainsi l'importance du phénomène de compression dans la dynamique du micro-interrupteur. Dans la même perspective on se place à une pression ambiante de  $1.013 \times 10^3$  Pa.

Dans un premier temps on établit un modèle à partir d'une seule trajectoire d'apprentissage qui correspond à une entrée échelon de 9.5V. La figure 4-15 présente la trajectoire d'apprentissage dans le domaine mécanique ainsi que l'emplacement des points de linéarisation choisis sur l'état complet.



**Figure 4-15** Déplacement du point milieu du micro-interrupteur pour la trajectoire d'apprentissage et emplacement des points de linéarisation.

On teste le modèle linéarisé par morceaux pour la même simulation que celle qui a servi à l'établir.

#### *a. Calcul des distances sur l'état complet*

On choisit dans un premier temps de calculer les distances sur l'état complet en normalisant les variables. Pour 7 points de linéarisation, on obtient déjà une erreur sur le temps de commutation inférieure à 1%.

**Tableau 4-1** Erreur relative sur le temps d'effondrement  $T_{pi}$  pour différents nombre de points de linéarisation et des procédures de pondération différentes.

Nombre de points de linéarisation (critère distance état complet $\alpha$ ) traj.app 9.5V	Erreur relative sur $T_{pi}$ (9.5V) Poids Rewiensi $T_{pi}=2.877^e-5$	Erreur relative sur $T_{pi}$ (9.5V) Poids simple
7 (0.4)	0.8%	0.74%
8 (0.3)	1.9%	

<b>10 (0.25)</b>	<b>0.72%</b>	<b>0.72%</b>
13 (0.2)	0.04% <0.1%	
16(0.15)	0.34%	
<b>23(0.1)</b>	<b>0.03% &lt;0.1%</b>	<b>0.03%</b>
29(0.08)	0.05%<0.1%	
33(0.07)	0.04%<0.1%	
38 (0.06)	0.05%<0.1%	0.05%

Le temps de simulation pour l'activation par une tension échelon de 9.5V pour la résolution par le solveur ode15s de Matlab du modèle réduit (4-15a) est de 30 s pour 500 pas de temps. Pour le modèle basé sur 7 points de linéarisation, le temps de construction (évaluation et stockage des valeurs des fonctions et des jacobiens) à partir de cette trajectoire est de 0.8s. Le temps de simulation est ensuite de 1.7s pour 240 pas de temps quelle que soit la méthode de pondération adoptée, ce avec le solveur ode15s. On a donc un gain d'environ un facteur 15 sur le temps de simulation par rapport au modèle non-linéaire original.

Pour la procédure de pondération de Rewiński, on a testé différentes valeurs de  $\beta$  qui est un paramètre à fixer (cf §4.2.1.2b). Pour un  $\beta$  de 10 ou 40, on trouve de moins bons résultats que pour la valeur recommandée qui est de 25. Plus  $\beta$  est grand plus le point de linéarisation le plus proche a de l'importance par rapport aux autres. La conséquence est que la valeur des poids passe rapidement de zéro à un, et inversement, pour une valeur de  $\beta$  importante. On a également utilisé la procédure de pondération simplifiée qui consiste à ne retenir que le point de linéarisation le plus proche. Les résultats sont aussi bons. Pour ce modèle, la procédure simplifiée est donc suffisante.

### ***b. Calcul des distances sur les domaines découplés***

Un premier constat est que le nombre de points de linéarisation en ce qui concerne la coordonnée modale vitesse n'influe pas sur les résultats. En effet, dans notre exemple les fonctions  $\mathbf{g}(\mathbf{z})$  et  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$  sont linéaires en  $\dot{\mathbf{a}}$ . Elles ne sont pas linéaire en  $\mathbf{s}$ .  $N_{lin\_M}$  correspond au nombre de points de linéarisation pour la coordonnée modale mécanique,  $N_{lin\_S}$  pour les coordonnées amortissement.  $N_{lin}$  est le nombre de points de linéarisation total.

**Tableau 4-2**  $N_{lin\_S}=1$  et on fait varier  $N_{lin\_M}$ .

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative (%)
1	1	1	24%
2(0.5)	1	2	13.5%
3(0.4)	1	3	9.9%



4	1	4	8.2%
5(0.2)	1	5	5.5%
<b>10(0.1)</b>	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>4.93%</b>
14(0.07)	1	14	4.83%
19(0.05)	1	19	4.78%
40(0.02)	1	40	4.73%
68	1	68	4.72%

On se contente dans un premier temps de parcourir l'espace de la coordonnée modale mécanique en ne prenant qu'un point dans la partie fluide. La tableau 4-2 présente les résultats. On constate que la précision maximum que l'on obtient sur le temps de commutation est d'environ 5% et qu'environ 10 points sont suffisants pour obtenir cette précision.

**Tableau 4-3**  $N_{lin\_M}=1$  et on fait varier  $N_{lin\_S}$

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative (%)
1	3(0.5)	3	16%
1	8(0.2)	8	18.5%
1	15(0.1)	15	19%
1	28(0.05)	28	19%

On parcourt ici (Tableau 4-3) l'espace des coordonnées de squeeze (de dimension 4). On note que l'erreur sur le temps de commutation reste importante (>16%). De plus, il semble que l'augmentation du nombre de points de linéarisation n'améliore pas les résultats.

On cherche ici la combinaison qui semble donner les résultats les plus précis. On fixe le nombre de points de linéarisation dans le domaine mécanique et on fait varier les coordonnées d'amortissement. On présente les résultats dans les tableaux suivants (Tableaux 4-4a à 4-4d).

**Tableau 4-4 (a)**  $N_{lin\_M}=2$  et on fait varier  $N_{lin\_S}$

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative (%)
2 (0.5)	2 (1)	4	1.94%
2	3 (0.5)	6	1.94%
2	6 (0.25)	12	2.27%
<b>2</b>	<b>8 (0.2)</b>	<b>16</b>	<b>0.51%</b>
2	10 (0.15)	20	0.9%
2	12 (0.13)	24	1.63%
2	15 (0.1)	30	1.45%
2	28 (0.05)	56	1.19%

**Tableau 4-4 (b)**  $N_{lin\_M}=5$  et on fait varier  $N_{lin\_S}$ 

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative(%)
5 (0.2)	3(0.5)	15	2.25%
<b>5 (0.2)</b>	<b>8(0.2)</b>	<b>40</b>	<b>0.77%</b>
5	10(0.15)	50	0.6%
5	12 (0.13)	60	0.45%

**Tableau 4-4 (c)**  $N_{lin\_M}=7$  et on fait varier  $N_{lin\_S}$ 

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative(%)
7 (0.15)	3 (0.5)	21	1.81%
<b>7</b>	<b>5 (0.3)</b>	<b>35</b>	<b>0.7%</b>
7	6 (0.25)	42	0.54%
7	10	70	0.53%
7	13 (0.12)	91	0.18%

**Tableau 4-4 (d)**  $N_{lin\_M}=10$  et on fait varier  $N_{lin\_S}$ 

$N_{lin\_M}$	$N_{lin\_S}$	$N_{lin}$	Erreur relative (%)
10(0.1)	3 (0.5)	30	1.4%
<b>10</b>	<b>5 (0.3)</b>	<b>50</b>	<b>0.73%</b>
10	8 (0.2)	80	0.31%
10	10 (0.15)	100	0.2%
10	15 (0.1)	150	0.18%

Il semble falloir un nombre de points de linéarisation minimum dans le domaine mécanique pour que l'augmentation du nombre de points de « squeeze » soit pertinente. La combinaison optimum que l'on trouve pour atteindre une précision supérieure à 1% sur le temps d'effondrement est 7 points de linéarisation dans le domaine mécanique et 5 dans le domaine fluide. Ceci correspond à un total de 35 points de linéarisation pour le modèle ce qui est bien supérieur aux 7 points nécessaires à la même précision pour le choix des points sur l'état complet. Ceci est dû au fait qu'en découplant les domaines on sélectionne des points qui sont loin de la trajectoire d'apprentissage et qui ne servent pas directement dans la simulation du modèle linéarisé par morceaux. Ces points pourraient toutefois servir pour une simulation qui serait différente de la simulation d'apprentissage, ce qui à l'origine est l'un des objectifs de la construction de ces modèles. La validité du modèle obtenu serait donc beaucoup plus large, sans toutefois couvrir tout l'espace des phases comme un quadrillage uniforme le ferait. Ceci est possible au prix d'un coût de construction plus important du fait de l'évaluation de la valeur des fonctions et des jacobiens aux points de linéarisation. Le temps de construction du modèle pour les 35 points de linéarisation est de 1.5s, à comparer aux 0.8s pour le modèle à 7

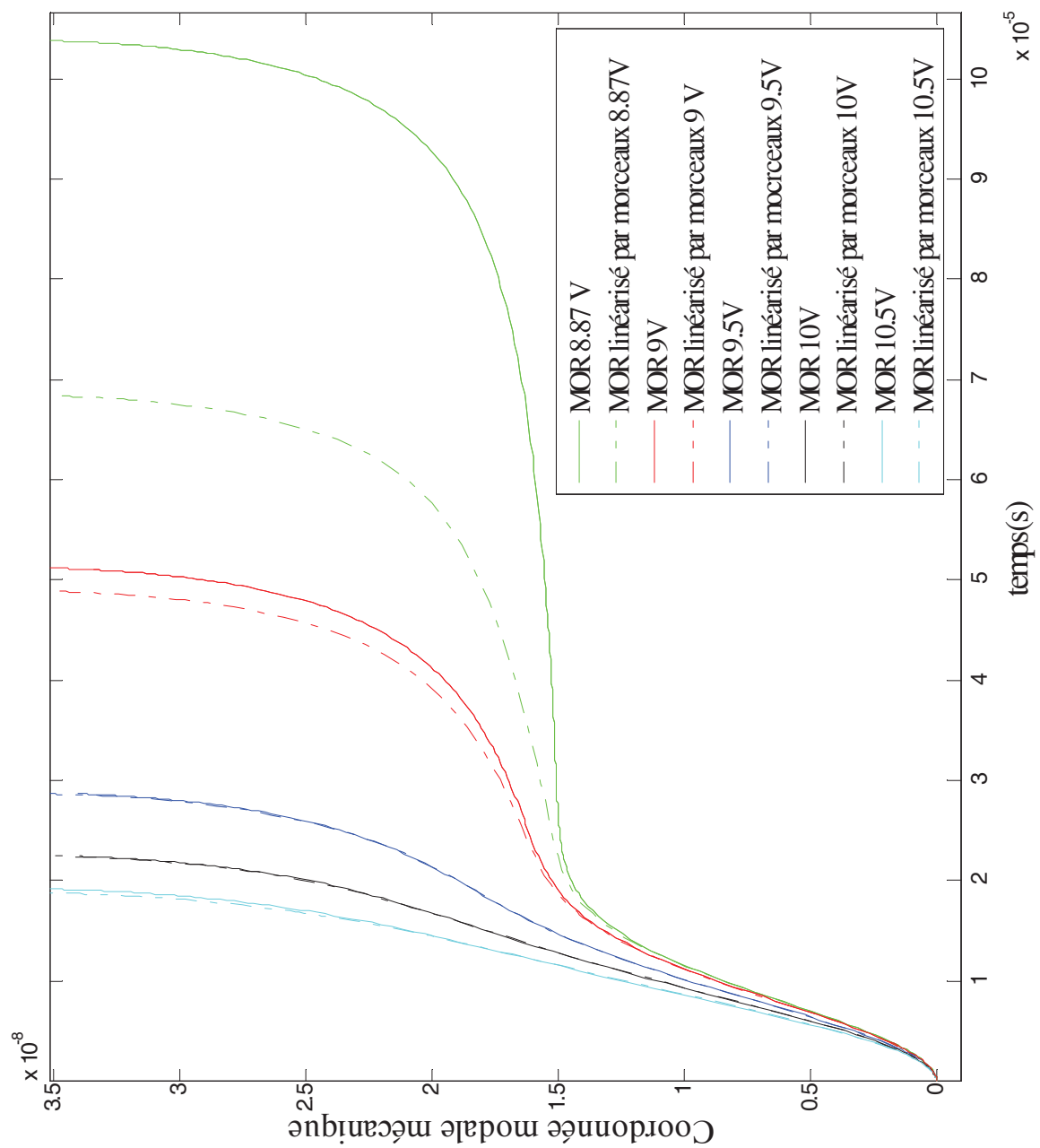
points de linéarisation choisis sur l'état complet. Le coût d'évaluation ne varie que peu car, même avec la méthode des poids de [Rewinski 2003 B], seul un ou deux poids sont non nuls. On constate en effet que le temps de simulation est de 2.4 s environ pour 140 pas de temps ce qui ne diffère que de très peu du modèle basé sur 7 points (1.7s pour 240 pas de temps).

#### **4.3.2.5. Résultats : domaine de validité des modèles**

On va ici tester le modèle établi pour une trajectoire d'apprentissage de 9.5V pour d'autres tensions d'actionnement de 8.87V à 10.5V toujours à une pression ambiante de  $1.013 \times 10^3$  Pa , ce pour les deux modèles proposés.

##### ***a. Calcul des distances sur l'état complet***

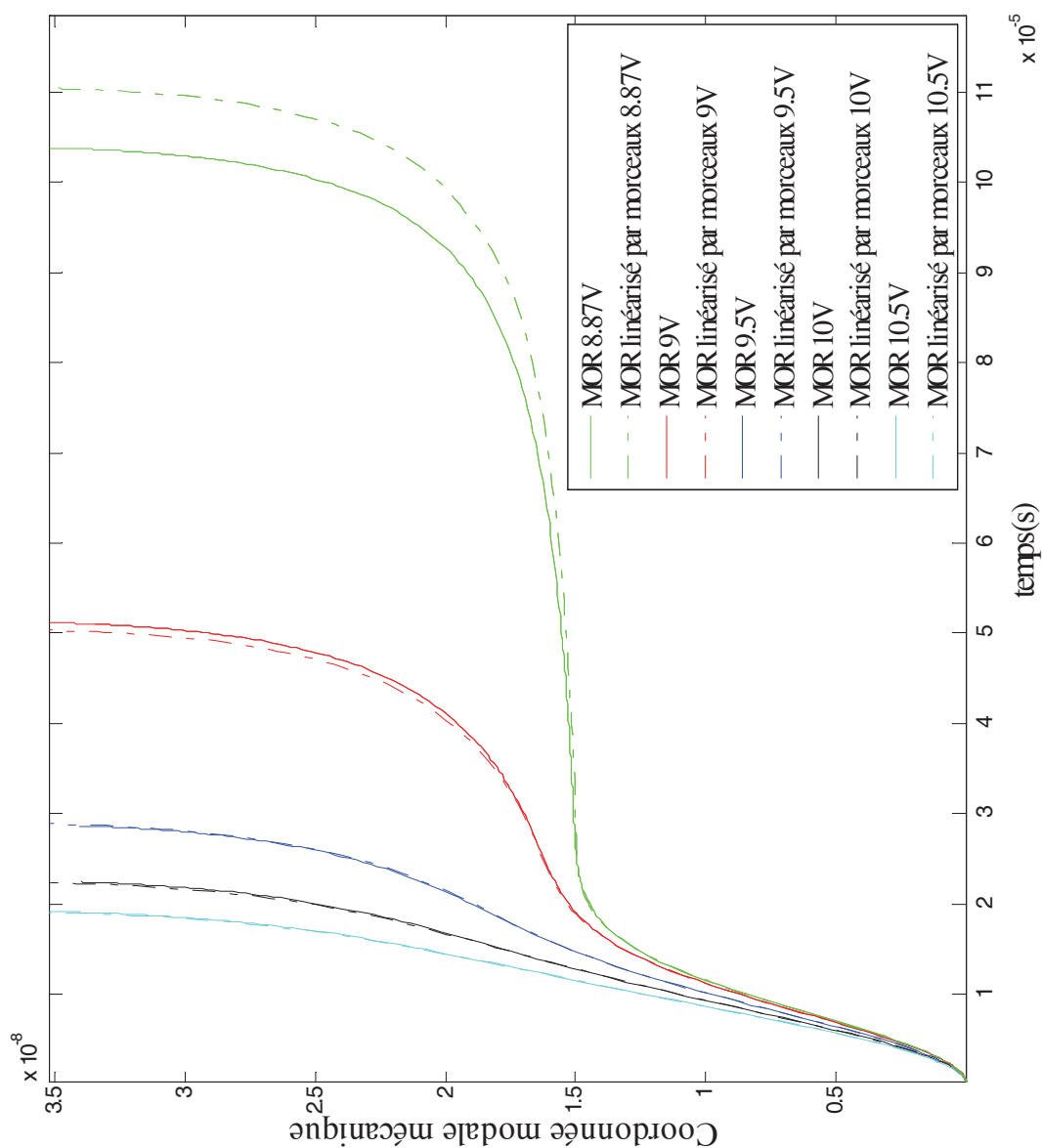
On se base ici sur le modèle à 13 points de linéarisation pour lequel on avait des résultats parfaits pour une trajectoire de simulation égale à la trajectoire d'apprentissage. Les résultats pour différentes tensions d'actionnement sont donnés figure 4-16. On trouve une erreur de 35% sur le temps d'effondrement pour un actionnement par la tension d'effondrement même (8.87V), de 5% pour un actionnement par une tension de 9V et de 2% pour une tension de 10.5V. La validité du modèle est donc bien restreinte au domaine proche de la trajectoire d'apprentissage. Une des solutions peut être de faire différentes trajectoires d'apprentissage sachant qu'elles impliquent le coût de la simulation du système non-linéaire, l'autre proposée ici peut être de découpler les domaines lors du choix des points de linéarisation. On en présente les résultats dans le paragraphe suivant.



**Figure 4-16** Coordonnée modale mécanique pour différentes tensions d’actionnement pour le modèle réduit original et le modèle réduit linéarisé par morceaux basé sur 13 points de linéarisation choisis par un calcul de distance sur l’état complet.

### *b. Calcul des distances sur les domaines découplés*

On se base ici sur le modèle à 35 points de linéarisation (7 dans le domaine mécanique, 5 dans le domaine fluide) qui donnait une erreur inférieure à 1% sur le temps d'effondrement pour une trajectoire de 9.5V.



**Figure 4-17** Coordonnée modale mécanique pour différentes tensions d'alimentation pour le modèle réduit original et le modèle réduit linéarisé par morceaux basé sur 35 points de linéarisation choisis en découplant les domaines.

L'erreur pour une tension d'actionnement de 8.87V n'est plus que de 6% alors que celle pour une tension de 9V est de 2%. Pour le reste on obtient des résultats quasi parfaits. Le découplage des domaines lors du choix des points de linéarisation permet, au prix d'un plus grand nombre de points de linéarisation de couvrir une partie de l'espace des phases plus importante et donc d'augmenter le domaine de validité du modèle. Il est toutefois difficile de savoir si l'espace des phases couvert en plus est véritablement pertinent. Il semble l'être ici. On rappelle que du point de vue évaluation du modèle, le nombre de points de linéarisation, dans une certaine mesure, n'a pas une très grande influence (cf résultats du §4.3.2.4\b). Donc cette méthode sans augmentation substantielle du coût de construction (pas de trajectoire d'apprentissage supplémentaire nécessaire) ni du coût d'évaluation permet d'étendre le domaine de validité du modèle.

### 4.3.3. Linéarisation par morceaux d'un modèle différences finies de micro-interrupteur.

#### 4.3.3.1. Modèle différences finies

On se base ici sur le modèle différences finies couplé décrit au §3.2.4.1 du chapitre 3. On en rappelle la structure ici :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\mathbf{w}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\text{elec}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Afin de réduire le temps de simulation de ce modèle, on peut le projeter sur une base choisie. Le temps de simulation restera important du fait de l'évaluation des termes non-linéaires qui requiert un retour aux coordonnées initiales. Ainsi on propose dans un premier temps de linéariser ce modèle par morceaux pour ensuite le projeter sur une base choisie. Du fait de la linéarisation, le retour aux coordonnées initiales ne sera plus nécessaire, on pourra simplement travailler sur les coordonnées réduites. Par identification au cas du modèle réduit, on définit la fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$  suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\mathbf{w}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

où  $\mathbf{z}$  est le vecteur d'état.

Le jacobien  $\mathbf{JF}$  a alors la forme suivante :

$$\mathbf{JF}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{z}) + \mathbf{E}(\mathbf{z}) & \mathbf{R}(\mathbf{w}) + \mathbf{L}(\mathbf{z}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

La dérivation des matrices constituant la matrice jacobienne est donnée en annexe F. On remarquera que le calcul des jacobiens est plus fastidieux que pour le cas où l'on part du modèle réduit.

#### 4.3.3.2. Résultats

On étudie la poutre décrite au §3.2.3.1 du chapitre 3. La méthode de relaxation est utilisée pour la trajectoire d'apprentissage. On constate pour une tension d'actionnement sinusoïdale d'amplitude 12V et de fréquence 10kHz à pression atmosphérique que la simulation du modèle linéarisé par morceau basé sur 3 points de linéarisation est en fait plus coûteuse en temps que la simulation du modèle différences finies original non-linéaire résolu par le solveur ode15s de Matlab. Ceci est dû au fait que, pour le modèle linéarisé par morceau, il est nécessaire de résoudre un système linéaire de grand ordre mal conditionné à chaque pas de temps. On pourrait aussi utiliser le solveur ode15s de Matlab ce qui réduirait sans doute le temps de simulation. On va projeter le modèle.

On utilise comme base de projection les modes propres linéaires pour le modèle mécanique et des modes issus de la décomposition propre orthogonale pour l'équation de Reynolds. Les instantanés sur lesquels on réalise une décomposition propre orthogonale sont issus d'une simulation de l'équation de Reynolds pour la poutre étudiée dont le premier mode propre est excité sinusoïdalement à une fréquence de 50 kHz et une amplitude de 20% de la distance initiale au substrat. On travaille à pression atmosphérique. On retient le premier mode propre linéaire mécanique et les deux premiers modes de pression. La validité de la base de projection est vérifiée en comparant au système différence finies non projeté pour un maillage de 41 points sur la longueur et 11 sur la largeur. Les résultats pour une force d'excitation uniforme d'amplitude  $5 \cdot 10^{-2}$  N/m et de fréquence 10 kHz donne une erreur d'environ 3% sur le déplacement du point milieu entre les deux modèles. Ce résultat sert de validation à l'utilisation de cette base de projection.

Un retour aux coordonnées initiales sera nécessaire pour le calcul des valeurs de la fonction  $\mathbf{f}$  ainsi que de son jacobien  $\mathbf{JF}$  aux points de linéarisation mais, le modèle étant projeté, le stockage des jacobiens sera beaucoup moins coûteux puisque l'on stocke en réalité  $\mathbf{V}^T \mathbf{JFV}$  et

$\mathbf{V}^T \mathbf{f}$  où  $\mathbf{V}$  est la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs constituant la base de projection. On teste le modèle linéarisé par morceaux projeté sur la même trajectoire que précédemment, à savoir une tension d'actionnement sinusoïdale d'amplitude 12V et de fréquence 10kHz. L'évaluation et le stockage de la fonction  $\mathbf{V}^T \mathbf{f}$  et de son jacobien  $\mathbf{V}^T \mathbf{JFV}$  pour 5 points de linéarisation prend 4.5s CPU. La simulation du modèle linéarisé par morceaux projeté d'ordre 4 basé sur ces 5 points de linéarisation est de 3.5s pour 500 pas de temps sur deux périodes. Le coût de la simulation est divisé par 8 par rapport à la simulation du modèle différences finies couplé original non projeté (30s) et d'un facteur 6 par rapport au modèle différences finies projeté (20s). Pour le modèle linéarisé par morceaux, on n'a utilisé et le solveur ode15s de Matlab et un schéma explicite/implicite simple et on a retenu la méthode pour laquelle on obtenait le temps de simulation le plus court.

Ces résultats sont à comparer à ceux du modèle réduit pour cette même simulation. La simulation du modèle réduit original non-linéaire prend 23s à comparer à 20s pour le modèle différences finies projeté. 16 points de linéarisation sont nécessaires pour une précision correcte à comparer à 5 pour le modèle différences finies projeté. Le coût de construction du modèle est ainsi un peu plus élevé que pour le modèle différences finies à savoir 7.5s (à comparer à 4.5s). Enfin la simulation même prend seulement 2.5s soit un gain de presque un facteur 10 à comparer à 3.5s pour le modèle différences finies projeté linéarisé par morceaux.

On constate que pour plusieurs raisons il est plus intéressant de travailler sur la projection du système d'EDPs directement que sur la projection d'un modèle tout d'abord discrétisé pour donner un modèle différences finies. Les temps de simulations des deux modèles simplement projetés sont comparables. La discrétisation étant fastidieuse, il est donc plus intéressant, déjà de ce point de vue là de partir de l'EDP non discrétisée. De la même manière la linéarisation par morceaux se ramène aux calculs des jacobiens des fonctions régissant la dynamique et ces calculs se révèlent beaucoup plus simples pour le modèle projeté à partir du système d'EDPs. Ils se ramènent en effet au calcul de dérivées d'un petit nombre d'intégrales dont on a une expression analytique (cf annexe F) alors que les calculs de jacobiens du modèle différences finies sont plus lourds.



## 4.4. Linéarisation des coefficients du modèle réduit

### 4.4.1. Principe

On a remarqué que les termes non-linéaires apparaissant dans (4-15) sont des fonctions de la coordonnée mécanique seule. Une idée simple permettant de réduire le coût d'évaluation du modèle réduit est donc de linéariser par morceaux les coefficients des matrices apparaissant dans (4-15) et non les fonctions globales **f** et **g** décrites plus haut (équations (4-16) et (4-17)). Cette approche présente l'intérêt de ne pas nécessiter de trajectoire d'apprentissage, contrairement à celles présentées au §4.3.

On a pu se rendre compte que, dans les applications de type micro-interrupteur, la prise en compte d'un seul mode mécanique était suffisante. Il suffit donc de discrétiser l'espace à une dimension correspondant à la coordonnée modale mécanique pour chacun des coefficients des matrices apparaissant dans (4-15). Le coût d'établissement du modèle est donc réduit. Les dérivées des coefficients non-linéaires sont approximées numériquement à partir des valeurs calculées à chaque point de linéarisation. Par ailleurs, on utilise une procédure de pondération simplifiée qui consiste à ne retenir que le point le plus proche. Par exemple **A(a)** sera approximée par :

$$\mathbf{A}(a) \approx \mathbf{A}(a_i) + \mathbf{DA}_i(a - a_i) \quad (4-23)$$

où  $a_i$  est le point de linéarisation le plus proche de  $a$  et  $\mathbf{DA}_i$  est la matrice contenant les dérivées premières des coefficients de **A** au point  $a_i$ .

On réécrit (4-15) sous la forme:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{C}(a)\mathbf{z} - \mathbf{F}(a)) = \mathbf{G}(a)\mathbf{z} + \mathbf{F}_e(a) \quad (4-24)$$

De même que précédemment on ne linéarise pas la force électrostatique  $\mathbf{F}_e$ .

Pour l'intégration dans le temps, on choisit un schéma numérique implicite qui s'écrit :

$$\frac{\mathbf{C}(a)\mathbf{z} - \mathbf{F}(a) - (\mathbf{C}(a_{-1})\mathbf{z}_{-1} - \mathbf{F}(a_{-1}))}{\Delta t} = \mathbf{G}(a)\mathbf{z} + \mathbf{F}_e(a), \quad (4-25)$$

$a_{-1}$ ,  $\mathbf{z}_{-1}$  étant les valeurs des variables d'état au pas de temps précédent.

On fait remarquer que, contrairement à la méthode de Rewiński et quelle que soit la méthode de résolution numérique employée, cette approche nécessite à chaque pas de calcul la résolution d'un système d'équations non-linéaires. Par exemple, après linéarisation par morceaux des coefficients de **C** et **F**, le membre de gauche de (4-19) est du deuxième ordre en **z**. En pratique, on utilise l'outil *fsolve* de Matlab.

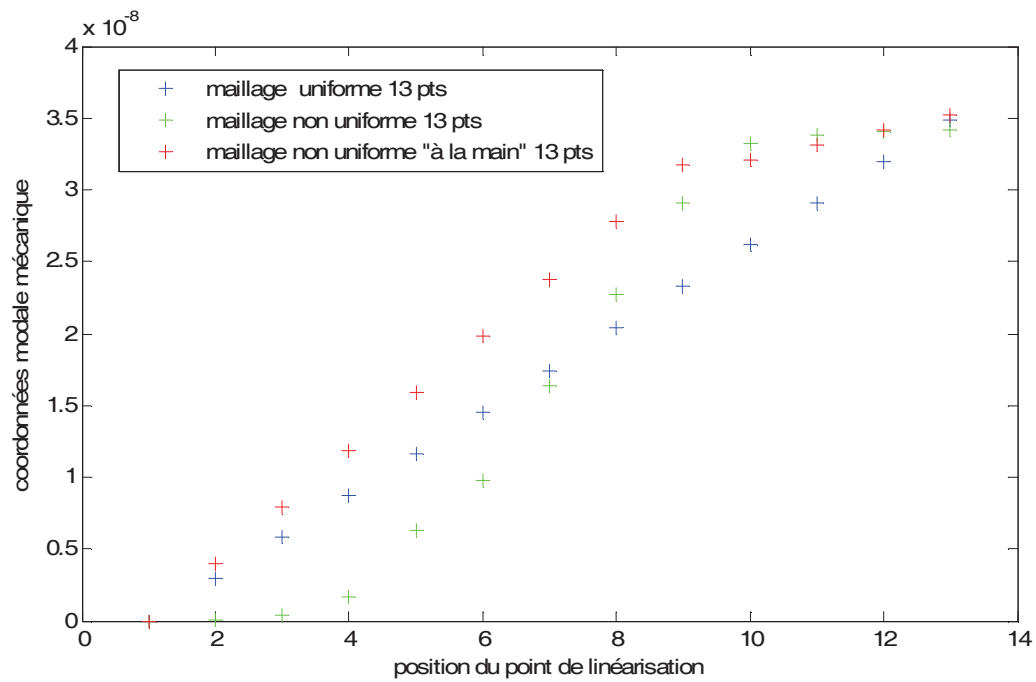
#### 4.4.2. Validation

On étudie la réponse à un échelon de tension de 9.5V à la pression atmosphérique pour les paramètres de la structure du § 3.2.3.1. Le tableau 4-5 regroupe les erreurs sur le déplacement et sur le temps d'effondrement de la structure en fonction du nombre de points de linéarisation. Deux types de maillage sont proposés. Un maillage uniforme et un maillage non uniforme qui consiste à densifier le nombre de points sur le dernier dixième de l'espace de la coordonnée modale mécanique (2/3 des points sur les 9/10 de l'espace, 1/3 des points sur le dernier dixième). On arrête le maillage à une valeur de  $0.999 a_{\max}$ . On a pu remarquer que, pour un faible nombre de points de linéarisation (inférieur à 15), la solution du modèle linéarisé par morceaux peut différer sensiblement de celle du modèle non-linéaire complet, en particulier pour les fortes valeurs de  $a$ . Ceci s'explique par le fait que plus la poutre se rapproche du substrat, moins la force d'amortissement est linéaire. La fin de la trajectoire nécessite donc plus de points de linéarisation. La recherche d'une méthode systématique pour déterminer un maillage non uniforme adéquat n'a pas été concluante. En effet, on obtient la même erreur sur le temps de commutation avec un maillage uniforme ou avec le maillage obtenu par la méthode de Rewiński. On remarque toutefois sur la figure 4-10 que la solution du modèle correspondant au maillage uniforme est globalement plus proche de la solution de référence que celle du modèle obtenu par la méthode de Rewiński (en particulier, on remarque (Fig. 4-9) que cette dernière méthode sélectionne des points de linéarisation inutiles pour les petites valeurs de  $a$ ). Le meilleur résultat est celui issu du maillage non-uniforme densifié sur le dernier dixième de l'espace de la coordonnée modale mécanique. Il est à noter que l'utilisation d'un maillage non-uniforme n'a d'intérêt véritable que lorsque le nombre de points de linéarisation est faible : par exemple, on obtient une précision supérieure à 1% sur le temps d'effondrement pour un maillage uniforme de 25 points.

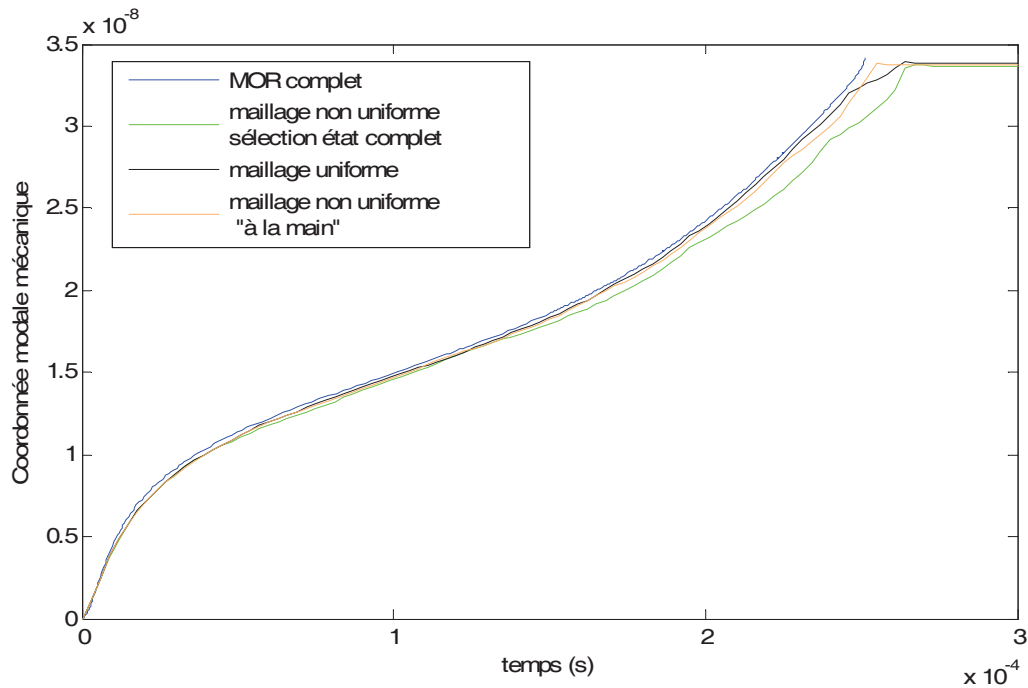
**Tableau 4-5** Erreur sur le temps d'effondrement fonction du maillage choisi

Nombre de points de linéarisation	Erreur sur le temps d'effondrement
5 (uniforme)	60%
5 (non uniforme)	44%
10 (uniforme)	8%
10 (non uniforme)	5%

13 (uniforme)	5%
13 (non uniforme)	1.5%
15 (uniforme)	2%
15 (non uniforme)	1.5%
20 (uniforme)	1.5%
25 (uniforme)	0.3%



**Figure 4-18** Répartition des 13 points de linéarisation pour un maillage uniforme, pour un maillage issu de la sélection des points de linéarisations sur l'état complet, pour un maillage densifié sur le dernier dixième de l'espace à discrétiser.



**Figure 4-19** Réponse simulée du système (valeur de  $a(t)$ ) à un échelon de tension de 9.5V pour différents maillages de 13 points.

Le temps de simulation du modèle réduit (4-15a) intégré dans le temps par le solveur de Matlab ode15s pour un échelon de 9.5V est 50s pour 560 pas de temps. Le temps de simulation pour le modèle dont les coefficients sont linéarisés par morceaux basé sur un maillage de 25 points est de 18s pour 100 pas de temps, soit un gain d'un facteur supérieur à 2. On n'utilise pas le solveur ode15s pour la résolution du modèle linéaire par morceaux car étant donné sa forme, cela nécessiterait un changement de variable supplémentaire qui complique le problème.

#### 4.5. Conclusion

On a appliqué la méthode de linéarisation par morceaux de [Rewiński 2003 B] au modèle réduit et au modèle différences finies couplé. Dans le cas du modèle réduit, on a choisi les points de linéarisation sur l'état complet dans un premier temps puis en découplant les domaines dans un deuxième temps. Le découplage des domaines peut être une solution pour étendre le domaine de validité de ces modèles linéarisés par morceaux tout en utilisant l'information de la trajectoire d'apprentissage. Il est toutefois difficile d'évaluer si le domaine de l'espace des phases ainsi couvert est pertinent ou pas pour d'autres simulations. C'est une solution intermédiaire entre le quadrillage de l'espace des phases et le choix des points le long

d'une trajectoire d'apprentissage seule. La méthode de Rewiński *et al.* présente l'avantage de ramener l'intégration dans le temps selon un schéma étant forcément en partie explicite à la résolution de systèmes linéaires. On remarquera par ailleurs que pour un coût d'évaluation à peu près égal, les modèles construits directement à partir de l'EDP projetée et le modèle construit à partir du modèle différences finies présentent des coûts de construction très différents. Dans les deux cas, pour le modèle non-linéaire original, on revient aux coordonnées initiales via le calcul d'une intégrale ou la détermination de matrices différences finies. La détermination de ses matrices différences finies est particulièrement coûteuse. Une autre étape coûteuse, dans le cadre de la linéarisation par morceaux, pour le modèle basé sur le modèle différences finies est la détermination de l'expression des jacobiens qui se révèle très fastidieuse. Dans le cas de l'EDP projeté, il s'agit juste de dériver des expressions intégrales qui sont, de surcoût, en petit nombre. Ainsi, dans tous les cas, il est plus judicieux de partir de l'EDP projetée que de discrétiser pour obtenir un modèle différences finies que l'on projette ensuite.

Dans un deuxième temps, on a utilisé le fait que les coefficients non-linéaires des matrices du modèle réduit (4-15) ne dépendaient que de la coordonnée modale mécanique. On a alors pris le parti de linéariser par morceaux ces coefficients directement et non les fonctions régissant la dynamique. L'espace concerné par les points de linéarisation est alors celui de la coordonnée modale mécanique à une dimension. Il peut alors être simplement discrétisé uniformément. On peut toutefois essayer d'optimiser ce maillage en réglant la finesse sur différentes régions en fonction des besoins. Cette méthode s'est révélée pertinente pour un faible nombre de points de linéarisation. Quelque soit le maillage choisi, on peut considérer que le modèle pourra être réutilisé pour n'importe quelle simulation, l'espace de la coordonnée modale étant entièrement couvert. Ceci est clairement un avantage par rapport à la méthode de Rewiński *et al.*. On fera remarquer que l'utilisation de cette méthode implique la résolution d'un système non-linéaire pour l'intégration dans le temps et ce même si on utilise un schéma explicite. On perd ici un des grands intérêts de la méthode de Rewiński *et al.*. De même que précédemment de fait de la procédure des poids, un schéma entièrement implicite n'est pas possible. En ce qui concerne le nombre de termes à stocker (valeurs des fonctions, jacobiens, dérivées), les deux méthodes sont sensiblement équivalentes, la première nécessitant un peu plus de termes pour les jacobiens.

Ainsi la méthode de Rewiński et al. l'emporte du fait de sa résolution linéaire alors que la linéarisation directe des coefficients permet d'obtenir un modèle valable indépendamment d'une trajectoire d'apprentissage donc beaucoup plus robuste.

#### **4.6. Conclusion générale**

Afin de réduire le coût d'évaluation du modèle réduit de micro-interrupteur présenté au chapitre 3, on a cherché dans un premier temps à exprimer la force de pression projetée sur le premier mode mécanique comme une fonction des coordonnées modales mécaniques position et vitesse. Dans le cas incompressible, pour une poutre étroite, des simplifications sur l'équation de Reynolds permettent d'en trouver une expression analytique simple. Pour une poutre plus large, on a tabulé la valeur de cette fonction pour ensuite considérer la fonction linéaire par morceaux. Des résultats concordants ont été obtenus et un gain d'un facteur trois sur le temps d'une simulation d'effondrement a été relevé. Dans le cas compressible, il n'est plus possible d'exprimer la projection de la force fluide comme une fonction des coordonnées modales mécaniques. On est alors obligé de résoudre le système mécanique couplé à l'équation de Reynolds. Ce modèle présenté au chapitre 3 nécessite l'évaluation d'intégrales fonctions non-linéaires des coordonnées modales mécaniques. Une méthode pour réduire le coût d'évaluation de celles-ci consiste à les linéariser par morceaux. On a, dans un premier temps, appliqué la méthode générale décrite par Rewiński *et al.* sur le modèle différences finies projeté et le modèle basé sur le système d'EDPs projetées. Il s'est avéré plus pertinent du point de vue du coût de construction d'appliquer cette méthode au modèle issu directement des EDPs projetées que du modèle discrétisé par différences finies. Les modèles obtenus présentent deux avantages principaux : l'évaluation des termes non-linéaires ne nécessitent plus un retour aux variables physiques initiales mais juste le calcul de poids et l'intégration dans le temps est ramenée à la résolution de systèmes linéaires. Un clair gain du coût d'évaluation du modèle a été constaté. Le problème principal de ses modèles est qu'ils dépendent fortement de la trajectoire d'apprentissage.

On a dans un deuxième temps exploité la particularité du modèle réduit issu de la projection des EDPs, qui est que les coefficients non-linéaires ne dépendent que de la coordonnée modale mécanique. On a ainsi réduit la dimension de l'espace à parcourir par les points de linéarisation. L'intérêt majeur est que l'on peut couvrir complètement cet espace, le modèle

obtenu ne dépend alors plus d'une trajectoire d'apprentissage. L'intégration dans le temps se fait par contre par la résolution de systèmes non-linéaires.

## Conclusion générale

Nous avons tenté, dans ce mémoire, d'éclairer d'une lumière nouvelle le problème de la modélisation d'ordre réduit des systèmes couplés électrostatique-fluidique-mécanique, tels que les micro-interrupteurs MEMS.

Au chapitre 2, nous avons établi un modèle réduit de l'équation de Reynolds en appliquant à cette dernière un changement de variable, aboutissant à une formulation permettant l'utilisation de la méthode de Galerkin. Ce modèle est valable pour une structure flexible en grand déplacement, sous l'hypothèse des petites variations de pression. On a démontré que ce modèle convenait pour simuler le comportement transitoire d'un micro-interrupteur auquel on applique une tension supérieure à sa tension d'effondrement. S'il existe des modèles de l'équation de Reynolds sans hypothèse particulière, ceux-ci sont toutefois beaucoup plus coûteux à simuler et à établir. Dans ce même chapitre, le choix de la base de projection de l'équation de Reynolds a également été abordé : si le modèle que nous avons développé semble bien être le plus performant (dans la limite de son champ d'application), nous n'avons pas été capables de donner une justification autre que qualitative à ce résultat. Une première perspective de ce travail serait donc d'établir de manière rigoureuse la convergence de la solution construite à l'aide de notre approche. Il serait aussi intéressant d'étudier la validité de bases issues de la troncature balancée, générées à partir de simulations d'apprentissage de l'équation non-linéaire, avec ou sans changement de variable.

Dans le chapitre 3, nous avons validé le modèle réduit de « squeeze-film damping » en l'intégrant à un modèle complet couplé mécanique-électrostatique-fluidique d'un micro-interrupteur constitué d'une poutre encastrée à ses deux extrémités. La comparaison aux modèles différences finies se révèle concluante lorsque l'influence des grands déplacements sur la raideur de la poutre est négligée. Lorsque celle-ci est prise en compte, les résultats diffèrent sensiblement. Cependant, en ajustant la valeur de certains paramètres (tension résiduelle dans la poutre, notamment), l'écart entre les résultats simulés à l'aide du modèle réduit et les résultats expérimentaux est fortement diminué. Il est à souligner que les auteurs de la publication contenant les données expérimentales et les valeurs de référence des paramètres (et nombres d'autres auteurs depuis) ont eux-mêmes ajusté la valeur de la tension résiduelle pour faire coïncider leurs résultats expérimentaux et les résultats de leur modèle. Ceci démontre que la *structure* de modèle que nous avons proposée est adéquate et qu'elle est adaptée à des applications de type identification ou caractérisation. Le modèle proposé peut



sans doute être raffiné en choisissant un autre modèle de la viscosité effective du film d'air. En effet, le modèle de viscosité effective retenu a une influence considérable sur la valeur du temps de commutation de ce type de structures ou pour l'extension du modèle à des applications de type microrésonateur.

Enfin, au chapitre 4, nous avons abordé la thématique de la réduction du coût d'établissement et d'évaluation des modèles d'ordre réduit. Nous avons notamment proposé un modèle analytique et un modèle linéaire par morceaux de la projection de la force fluïdique sur le premier mode mécanique comme fonction des coordonnées modales mécaniques. Cette approche est nouvelle et présente des résultats concluants mais se limite toutefois au cas où l'écoulement est incompressible. Dans le cas où l'écoulement est compressible, nous avons montré qu'il n'était plus possible d'exprimer la projection de la force comme une fonction des seules coordonnées modales mécaniques. On a alors appliqué avec succès la méthode de linéarisation par morceaux de Rewiński. L'un des enjeux de cette méthode est de parcourir un domaine important de l'espace des phases lors de trajectoires d'apprentissage afin de garantir une large validité du modèle. Une solution a été proposée pour étendre l'espace couvert par les points de linéarisation sans augmenter le nombre de trajectoires d'apprentissage. Il est toutefois difficile de savoir a priori si cet espace couvert est pertinent pour le domaine d'utilisation du microsystème (ce qui ouvre en filigrane le champ à des développements dans le domaine de la planification d'expériences numériques). On a ainsi proposé un modèle s'inspirant de cette approche, mais présentant l'avantage de ne pas dépendre d'une trajectoire d'apprentissage. Cette méthode, qui repose sur la structure particulière du modèle présenté au chapitre 2, pourrait être étendue à d'autres modèles sous la condition qu'ils présentent la même particularité. Nous sommes donc parvenus à développer un modèle réduit couplé non-linéaire d'un micro-interrupteur actionné électrostatiquement dont l'évaluation se fait à coût réduit et dont la validité ne dépend pas d'une trajectoire d'apprentissage. Une des autres suites de ce travail pourrait être d'utiliser ce modèle de l'amortissement pour un microrésonateur actionné dans le domaine des grands déplacements. Dans ce cadre, les pertes fluïdiques n'étant plus dominantes, il conviendra également de proposer des modélisations efficaces des pertes d'ancrage et des phénomènes dissipatifs à l'échelle nanométrique.

## Références

- [Aluru 1996] N.R. Aluru and J.White, “ A coupled numerical technique for self-consistent electromechanical analysis of iMEMS” in *Microelectromechanical Systems (MEMS), ASME Dynamic Systems and Control (DSC) Series*, 1996, Vol.59, part of Proc.1996 ASME, New York, pp. 275-280.
- [Aluru 1999] N.R.Aluru and J.White. “A multilevel Newton method for mixed-energy domain simulation of mems.” *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1999, Vol 8, N°3.
- [Bai 2002] Z.Bai “Krylov subspace techniques for reduced order modelling of large scale dynamical systems” *Applied Numerical mathematics*, 2002, 43, pp.9-44
- [Bai Site] Z. Bai <http://www-bsac.eecs.berkeley.edu/~cfm>.
- [Bao 2007] M.H. Bao, H. Yang, “Squeeze film air damping in MEMS”, *Sensors and Actuators A*, 2007, vol.136, pp. 3-27.
- [Chen 2001] J. Chen, “Modeling and simulation of integrated microstructures and systems” Thèse de l’université d’Illinois à Urbana-Champaign, U. S., 2001
- [Chen 2004] J. Chen, S.M. Kang, J. Zhou, C. Liu, and J. E. Schutt-Aine, "Reduced-Order Modeling of Nonlinear MEMS Devices With Taylor-Series Expansion and Arnoldi Approach," *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, vol. 13, no. 3, pp. 441-451.
- [Darling 1998] R. B. Darling , C. Hivick, J. Xu,”Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a Green’s function approach”, *Sensors and Actuators A*, 1998, 70, pp.32-41
- [Feeny 1998] B.F.Feeny. “On the physical interpretation of proper orthogonal modes vibrations”, *Journal of Sound and Vibration* ,1998, 211(4), pp.607-616
- [Fukui 1988] S.Fukui, R.Kaneko, “Analysis of ultra-thin gas film lubrication based on linearized Boltzman equation: first report-derivation of a generalized lubrication equation including thermal creep flow” *J. Tribol. Trans. ASME*, 1988,110, pp. 253-262
- [Gabbay 1998] L. D. Gabbay, “Computer aided macromodeling for MEMS”, Thèse du Massachussets Institute of Technology, U.S., 1998
- [Gabbay 2000] L.D. Gabbay, Jan E. Mehner, Stephen D. Senturia, “Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels-I: Non-Stress-Stiffened Case”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2000, Vol. 9. N°2.
- [Gilbert 1995] J. R.Gilbert, R. Legtenberg, et S.D.Senturia “3D-coupled electro-mechanics for MEMS: Application of CoSolve-EM” in *Proc. IEEE Micro Electro Mechanical Systems*, Amsterdam, Janvier 1995. pp.122-127.

[Gretillat 1994] M.-A.Gretillat, P.Thiebaud, N.F. de Rooij, C.Linder, “Electrostatic Polysilicon Microrelays Integrated with MOSFETs”, *Proc. IEEE MEMS Workshop 94*, Oiso, Japan, 1994, pp.97-101

[Gretillat 1995] M-A Gretillat, P Thiebaud, C Lindert, N F de Rooij, “Integrated circuit compatible compatible electrostatic polysilicon microrelays”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1995, Vol 5, pp.156-160.

[Griffin 1966] W.S. Griffin, H.H. Richardson, S.Yamanami, “A study of squeeze film damping”, *ASME J. Basic Eng.*, 1966, pp.451–456.

[Gupta 1996] R.K.Gupta, E.S.Hung, R.J. Yang, G.K. Ananthasuresh, S.D. Senturia, “Pull-in dynamics of electrostatically actuated beams” *Solid-state sensor and actuators workshop Late News Paper*, June 2-6, 1996.

[Gupta 1997] R.K. Gupta, S.D. Senturia, “ Pull-in time dynamics as a measure of absolute pressure”, in *Proc. MEMS 1997*, pp. 290-294.

[Hackbush 1989] W.Hackbush and Z.P.Nowak “On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering” *Numer.Math.*,1989, vol.54, pp.463-491.

[Hsieh 1994] S.R. Hsieh, S.W. Shaw, C.Pierre “Normal modes for large amplitude vibration of a cantilever beam” *Int. J. Solids Structures*, 1994, Vol 31 N°14, pp1981-2014.

[Hung 1999] E. S.Hung, Stephen D.Senturia. “Generating Efficient Dynamical Models for Microelectromechanical Systems from a Few Finite-Element Simulation Runs.” *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, Septembre 1999, Vol.8 N°3.

[Jiang 2005] D.Jiang, C.Pierre, S.W.Shaw, “Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation.” *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288, pp.791-812.

[Juillard 2010] J. Juillard, A. Bonnoit., E. Avignon, S. Hentz, E. Colinet “Large amplitude dynamics of micro/nanomechanical resonators actuated with electrostatic pulses”, *Journal of Applied Physics*, 2010, vol. 107, Issue 1.

[Lall 1999] S. Lall, J. E. Mardsen, Sonja Glavaski. “Empirical model reduction of controlled nonlinear systems.” *IFAC World Congress*, 1999.

[Lall 2002] S. Lall, J. E. Mardsen and Sonja Glavaski.”A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems.” *International Journal of robust and nonlinear control*, 2002.

[Landau 1967] Landau, Lifchitz, “Théorie de l'élasticité”, Editions Mir, 1967 (allongement des poutres = chapitre 20, pp.118-119)

[Legtenberg 1994] R. Legtenberg, H.A. Tilmans,” Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators. Part I. Design and fabrication”, *Sensors and Actuators*, A, 1994, Vol 45, pp.57-66.

[Leus 2004] V. Leus, D. Eleta, “Fringing Field effect in electrostatic actuators” *Technical report ETR-2004-2*, Mai 2004

[Li 2007] P.Li,R.Hu,Y.Fang,”A new model for squeeze-film damping of electrically actuated microbeams under the effect of a static deflection”, *Journal of Micromechanics and microengineering*, 2007, 17 , pp.1242-1251

[McCarthy 2002] B. McCarthy , G. Adams, N E McGruer and D Potter 2002 “A dynamic model, including contact bounce, of an electrostatically actuated microswitch”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2002, Vol 11, pp. 276-83.

[Mehner 2000] J. E. Mehner, L.D. Gabbay ,Stephen D. Senturia,” Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels-II: Stress-Stiffened Case”. *Journal of Microelectromechanical Systems*, Juin 2000, Vol. 9, N°2.

[Mehner 2003] J. E. Mehner, “Reduced-order modeling of fluid-structural interactions in MEMS based on modal projection techniques”, *12th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems*, 2003, vol. 2, pp. 1840-1843

[Mukherjee 2000] T.Mukherjee, G.K.Fedder, D.Ramaswamy, and J. White, “Emerging Simulation Approaches for Micromachined Devices.” *IEEE Transactions on computer-aided design of integrated circuit and systems*, Décembre 2000, Vol. 19, N° 12.

[Nabor 1991] K. Nabors and J. White 1991 “Fastcap: A multipole accelerated 3-D Capacitance Extraction Program”. *IEEE Transactions on Computer-aided design*, Novembre 1991, vol. 10, n°11.

[Nayfeh 1995] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*. Wiley Classics Library Edition Published 1995.

[Nayfeh 1997] A. H. Nayfeh, W. Lacarbonara, “On the Discretization of Distributed-Parameter Systems with Quadratic and Cubic Nonlinearities”, *Nonlinear Dynamics*, 1997, 13, pp. 203–220.

[Nayfeh 2005] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, E.M. Abdel-Rahman, “Reduced-order Models for MEMS Applications”, *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41, pp. 211-236

[Pamidighantam 2002] S. Pamidighantam<sup>1</sup>, R. Puers<sup>2</sup>, K. Baert<sup>1</sup>, H. A C Tilmans, ”Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed–fixed and fixed–free end conditions”, *J. Micromechanics. Microengineering*, 2002, 12, pp. 458–464

[Pesheck 1997] E.Pesheck, C.Pierre, “ A global methodology for the modal reduction of large nonlinear systems containing quadratic and cubic nonlinearities”, *Proceedings of DET’97, 1997 ASME design engineering technical conferences*, 1997

[Pesheck 2002] E. Pesheck, C.Pierre, “A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds”, *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 249 (5), pp.971-993.

- [Philips 1997] J.R.Philips, J.K. White .”A pre-corrected FFT method for electrostatic analysis of complicated 3-D structures” *IEEE Trans. Computer-aided design*, 1997, Vol.16, pp.1059-1072.
- [Pierre 2006] C. Pierre, D. Jiang, S. Shaw, “Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2006.
- [Rebeiz 2003] G. M. Rebeiz, "RF MEMS, Theory, Design and Technology," John Wiley & Sons, 2003
- [Rega 2005] G. Rega, H. Troger, “Dimension reduction of Dynamical Systems: Methods, Models, Applications”, *Nonlinear dynamics*, 2005, 41, pp. 1-15
- [Rewienski 2003 A] M. Rewienski “A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems” Thèse du Massachussets Institute of Technology, U.S., 2003
- [Rewienski 2003 B] M. Rewienski, J. White .”A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuit and Micromachined Devices”. *IEEE Transactions on Computer Aided design of integrated circuit and systems*, Février 2003, Vol. 22, N°2.
- [Rewienski 2005] M. Rewienski, J.White. “Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations”. *Linear algebra and its applications*, 2005.
- [Rosenberg 1966] R.M. Rosenberg, “On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom”, *Advances in Applied Mechanics*, 1966, 9, pp. 155-242
- [Rowley 2005] C.W. Rowley.” Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition”, Mars 2005. *Int. J. on bifurcation and Chaos*, 15(3), pp. 997-1013.
- [Senturia 1998] Stephen D. Senturia .”CAD Challenges for Microsensors, Microactuators, and Microsystems.” *Proceedings of the IEEE*, Août 1998, Vol. 86 n°8
- [Scherpen 1993] J.M.A. Scherpen, “Balancing for nonlinear systems”. *System& Control Letters*, 1993, pp. 143-153.
- [Scherpen 1996] J.M.A. Sherpen, ” $H_{\infty}$  Balancing for nonlinear systems”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, Vol 6, pp. 645-668 .
- [Shaw 1994] S.W.Shaw, C.Pierre, “Normal modes of vibration for non-linear continuous systems”, *Journal of Sound and Vibration* ,1994, 169(3), pp.319-347
- [Sirovich 1987] L. Sirovich, “Turbulence and the dynamics of coherent structures”, *Quart. Appl. Math*, 1987, vol. 45, pp. 561-571.
- [Slater 1996] J. C. Slater,”A Numerical Method for Determining Nonlinear Normal Modes”, *Nonlinear Dynamics*,1996, 10, pp. 19-30

[Sobolev 1989] S.L. Sobolev, *Partial differential Equations of Mathematical Physics*, Dover Publications, inc. New York.

[Touzé 2004] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, “Hardening /softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes”, *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273, pp. 77–101

[Touze 2006] C.Touzé, M.Amabili, “Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures”, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298, pp. 958-981

[Vakakis 1997] A.F. Vakakis, “Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1997, 11(1), pp. 3-22

[Vasilyev 2003] D.Vasilyev, M.Rewienski, J.White, “A TBR-based trajectory piecewise-linear algorithm for generating accurate low-order models for nonlinear analog circuits and MEMS”, *Proceedings of the 40th conference on Design automation*, Anaheim, CA, USA, 2003, pp 490-495

[Vasquez 2005] E. Vasquez, « Modélisation comportementale de systèmes non-linéaires multivariables par méthodes à noyau et applications », 12 mai 2005, Thèse de l’université Paris XI.

[Veijola 1995] T.Veijola, H. Kuisma, J.Lahdenpera, T.Ryhänen, “Equivalent circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer”, *Sensors and Actuators A*, 1995, 48, pp. 239-248

[Yang 1997] Y.J. Yang, M.A. Gretillat, S.D.Senturia, “Effect of Air Damping on the Dynamics of Nonuniform Deformations of Microstructures”, *Transducers 97, International Conference on Solid-State Sensors and Actuators 1997*, Vol.2, pp 1093-6

[Yang 2004] Y J Yang, S Y Cheng, K Y Shen “Macromodeling of coupled-domain MEMS devices with electrostatic and electrothermal effects” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, Vol 14, pp.1190–6.

[Younis 2003] M.I. Younis A.H. Nayfeh, “A study of the Nonlinear Response of a Resonant Microbeam to an Electric Actuation”, *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31, pp. 91-117.

[Younis 2004] M.I. Younis, “Microplate Modeling under Coupled Structural-Fluidic-Electrostatic Forces”, *NSTI-Nanotech 2004*, Vol. 2, pp. 251-254

[Westby 2002] E. Westby, T.A. Fjeldly, “Nonlinear analytical reduced-order modeling of MEMS”. *Modeling and simulation of microsystems, MSM’02*, 2002, pp.150–153.

[Westby 2003] E. R.Westby. “Macromodelling of Microsystems” Thèse. *Asic for MEMS* project financed by The Norwegian Research Council.

## Annexe A Navier-Stokes ANSYS

Navier Stokes incompressible 2D Film d'air

```
/BATCH,
/tit,SFD_ter
/FILNAME,SFD_ter
/PREP7

!geometrie
H0=2e-6
L=500e-6
rectng,,L,,H0

!physique
P0=0
mu=1.82e-5
rho=1.292

!element
et,1,141          ! 2-D XY system
esha,2
keyopt,1,4,1      !active le degre de liberte deplacement UX,UY du mesh

!propriétés physiques
FLDATA8,NOMI,DENS,RHO      ! densité nominale
FLDATA8,NOMI,VISC,MU       ! viscosité nominale

!maillage

NDX=30             !nbre d'éléments dur la longueur
NDY=4              !nbre d'éléments dur la hauteur
lesize,1,,,NDX,
lesize,3,,,NDX,
lesize,2,,,NDY,-5   ! -5 correspond au spacing ratio
lesize,4,,,NDY,-5
ALLSEL
AMESH,all

!definition deplacement
COEFF=0.1
f=1e3
OMEGA=2*3.1416*f

*DIM,TABUY,TABLE,6,7,1,,,0
!
! Begin of equation: H0*(1+COEFF*sin(OMEGA*{TIME}))
```



```

*SET,TABUY(0,0,1), 0.0, -999
*SET,TABUY(2,0,1), 0.0
*SET,TABUY(3,0,1), H0
*SET,TABUY(4,0,1), COEFF
*SET,TABUY(5,0,1), OMEGA
*SET,TABUY(6,0,1), 0.0
*SET,TABUY(0,1,1), 1.0, -1, 0, 1, 19, 3, 1
*SET,TABUY(0,2,1), 0.0, -1, 9, 1, -1, 0, 0
*SET,TABUY(0,3,1), 0, -2, 0, 1, 18, 3, -1
*SET,TABUY(0,4,1), 0.0, -1, 0, 1, 0, 0, -2
*SET,TABUY(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -1, 1, -2
*SET,TABUY(0,6,1), 0.0, -1, 0, 1, 17, 3, -3
*SET,TABUY(0,7,1), 0.0, 99, 0, 1, -1, 0, 0

! End of equation: H0*(1+COEFF*sin(OMEGA*{TIME}))

*DIM,TABVY,TABLE,6,6,1,,,0
!
! Begin of equation: H0*COEFF*OMEGA*cos(OMEGA*{TIME})
*SET,TABVY(0,0,1), 0.0, -999
*SET,TABVY(2,0,1), 0.0
*SET,TABVY(3,0,1), H0
*SET,TABVY(4,0,1), COEFF
*SET,TABVY(5,0,1), OMEGA
*SET,TABVY(6,0,1), 0.0
*SET,TABVY(0,1,1), 1.0, -1, 0, 1, 17, 3, 18
*SET,TABVY(0,2,1), 0.0, -2, 0, 1, -1, 3, 19
*SET,TABVY(0,3,1), 0, -1, 0, 1, 19, 3, 1
*SET,TABVY(0,4,1), 0.0, -1, 10, 1, -1, 0, 0
*SET,TABVY(0,5,1), 0.0, -3, 0, 1, -2, 3, -1
*SET,TABVY(0,6,1), 0.0, 99, 0, 1, -3, 0, 0
! End of equation: H0*COEFF*OMEGA*cos(OMEGA*{TIME})

!définition des contraintes

lsl,s,,,3          ! plaque du haut en mouvement
nsl,s,1
d,all,VX,
d,all,VY,%TABVY%

d,all,enke,-1      ! flag indiquant un mur mobile
d,all,UX,0.0
d,all,UY,%TABUY%

lsl,s,,,2          ! Côtés droit et gauche
lsl,a,,,4
nsl,s,1
d,all,pres,P0     !conditions limites "ouvertes"

```



```

lsl,s,,1                ! plan fixe du bas
nsl,s,1
d,all,vx,
d,all,vy,
d,all,ux,0.0
d,all,uy,0.0

allsel
finish

save, SFD_ter

/SOLU
!definition de la dure de l'experience + periode entre deux mesures
nts =100                ! nombre d'intervalles de temps
time = 1/f              ! temps de simulation
delta = time/nts        !durée d'un intervalle de temps
appf = delta            ! enregistre les résultats à chaque pas

fldata7,prot,dens,gas   !défini le modèle de la densité
FLDATA8,NOMI,DENS,RHO   ! densité nominale
FLDATA8,NOMI,VISC,MU    ! viscosité nominale
fldata9,cof1,dens,273    température de ref de la densité
fldata10,cof2,dens,1.013e5  pression de ref pour la densité

fldata15,pres,refe,1.013e5

fldata1,solu,tran,t
fldata4,time,pres,1e-3
fldata4,time,vx,1e-3
fldata4,time,vy,1e-3
fldata4,time,vz,1e-3
fldata4,time,TEMP,1e-3

!solver
fldata18,meth,pres,1
fldata18,meth,vx,1
fldata18,meth,vy,1
fldata18,meth,vz,1
fldata18,meth,temp,1
fldata18,meth,enke,1
fldata18,meth,ends,1

fldata30,quad,momd,2      ! increased quadrature for deformed
fldata30,quad,moma,2      ! elements (intégration numérique)
fldata30,quad,moms,2

```

```

fldata30,quad,prsd,2
fldata30,quad,prss,2          !analyse transitoire
fldata4,time,step,delta
fldata4,time,numb,nts
fldata4,time,tend,time
fldata4,time,glob,30          !nbre d'itération par pas de temps
fldata4,time,appe,appf        !definit la fréquence d'enregistrement des résultats (ici chaque pas
de temps)
fldata1,solu,ale,t            !active la formulation ALE
SOLVE
finish

SAVE,SFD_ter

/post26
RESUME,SFD_ter
!données à enregistrer pour time history postprocessing
!definition des variables
NSOL,2,17,U,Y,uy_milieubas
NSOL,3,55,U,Y,uy_milieuhaut
!NSOL,4,178,U,Y,uy_milieu milieu
NSOL,5,17,PRES,,P_milieubas
NSOL,6,55,PRES,,P_milieuhaut
!NSOL,7,178,PRES,,P_milieu milieu
!NSOL,8,46,V,X,V_bord1
!NSOL,9,47,V,X,V_bord2
!NSOL,10,48,V,X,V_bord3
STORE,NEW
plvar,2,3,4
finish

/post1
set,NEAR,,,,0.3e-3
PLNSOL,pres
PLNSOL,V,X

```

## Annexe B Equation des poutres d'Euler Bernoulli

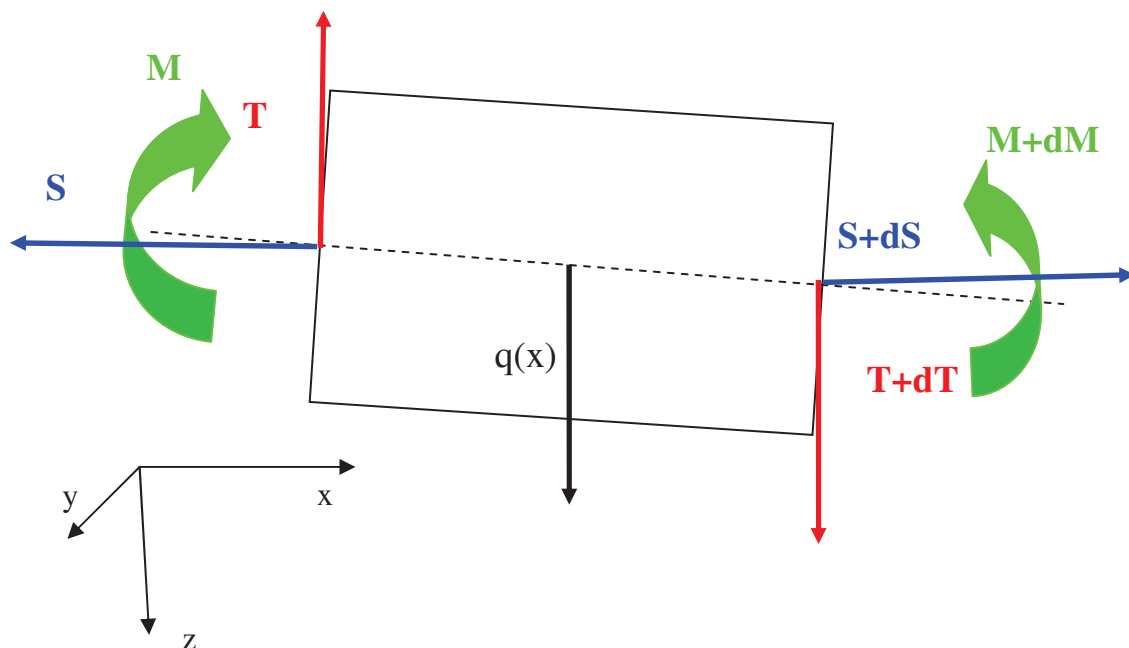
### a-Dérivation de l'équation en grands déplacements

Soit une poutre, c'est-à-dire que l'une des dimension est grande devant les deux autres.

Afin de traduire économiquement le phénomène de flexion, on fait les hypothèses suivantes :

- pas de déformations perpendiculaires à l'axe médian
- pas de déformations de cisaillement transverse

Ci-dessous un tronçon de cette poutre compris entre  $x$  et  $x+dx$



$M$  est le moment fléchissant,  $T$  l'effort tranchant,  $S$  l'effort axial,  $q$  la force linéique.

Soit  $w(x,t)$  le déplacement dans la direction  $z$  de l'axe neutre de la poutre. Le moment fléchissant  $M$  de chaque section de la poutre est relié au déplacement transversal selon la relation :

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{B-1})$$

où  $I = \frac{Wh^3}{12}$  est le moment d'inertie de la poutre, et  $E$  son module d'Young.

Si on écrit la relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe  $Oz$  pour ce tronçon de poutre, on obtient :

$$\frac{dT}{dx} + q(x) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{B-2})$$

où  $A = Wh$  la section de la poutre.

Si on écrit l'équilibre des moments selon l'axe Oz en prenant l'origine en  $x+dx$ , on obtient :

$$M + Tdx - Sdw - \frac{q(x)dx^2}{2} = M + dM \quad (\text{B-4})$$

soit au premier ordre

$$\frac{dM}{dx} - S \frac{\partial w}{\partial x} + T = 0 \quad (\text{B-5})$$

Si on dérive cette expression selon  $x$  et qu'on remplace l'expression de  $M$  par (C-1) et qu'on applique (C-2), on obtient l'équation d'Euler Bernoulli dans le cas d'une poutre sous contrainte axiale, soit :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - S \frac{\partial w}{\partial x} = q(x) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{B-6})$$

Si on écrit l'équilibre axial on obtient :

$$dS = 0 \quad (\text{B-7})$$

$S$  est donc une constante sur la longueur de la poutre.

Dans le cas où la tension axiale vient des grands déplacements, elle vaut :

$$S = \sigma_{xx} A \quad (\text{B-8})$$

et

$$\sigma_{xx} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{B-9})$$

Où  $L$  est la longueur initiale de la poutre et  $\Delta L$  l'allongement de la ligne centrale pour un déplacement  $w(x)$  [Landau 1967]. La longueur de la poutre vaut alors :

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx \quad (\text{B-10})$$

Pour  $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$ , on fait un développement limité au deuxième ordre :

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{B-11})$$

On obtient

$$S = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{B-12})$$

Il peut aussi y avoir un terme de contrainte résiduelle  $S_0$ .

### **b-Modes propres de vibrations de la poutre**

Ces modes sont déterminés à partir de l'équation d'Euler-Bernoulli linéaire, c'est-à-dire que le terme de tension axiale dû au grand déplacement n'est pas pris en compte, par contre la contrainte résiduelle est elle bien prise en compte. On suppose le mouvement décrit par une superposition de modes de vibrations (B-13) :

$$w(x, t) = \sum_n w_n(x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \quad (\text{B-13})$$

On prend comme solution possible, une solution du type  $w_n(x) = e^{\lambda x}$ .  $\lambda$  doit alors vérifier l'équation suivante :

$$\lambda^4 - k \lambda^2 - \beta_n^4 = 0 \quad (\text{B-14})$$

avec

$$\beta_n^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_n^2, \quad k = \frac{S_0}{EI}.$$

$\lambda$  peut prendre les valeurs  $\sqrt{Y_1}, -\sqrt{Y_1}, i\sqrt{(-Y_2)}, -i\sqrt{(-Y_2)}$

où

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + \beta_n^4} \\ Y_2 &= \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + \beta_n^4} \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

On pose :

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{Y_1} \\ f_2 &= \sqrt{(-Y_2)} \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

On cherche donc les solutions  $w_n$  sous la forme :

$$w_n(x) = A \cosh(f_1 x) + B \sinh(f_1 x) + C \cos(f_2 x) + D \sin(f_2 x) \quad (\text{B-17})$$

Pour une poutre encastree-encastree, les conditions limites permettant de déterminer les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  sont :

$$\begin{aligned} w_n(0) &= w_n(L) = 0 \\ w_n'(0) &= w_n'(L) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

L'équation à résoudre est alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(f_1 L) & \sinh(f_1 L) & \cos(f_2 L) & \sin(f_2 L) \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 \\ f_1 \sinh(f_1 L) & f_1 \cosh(f_1 L) & -f_2 \sin(f_2 L) & f_2 \cos(f_2 L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B-19})$$

Pour qu'il existe une solution autre que la solution triviale nulle,  $\beta_n$  doit vérifier  $\det(\mathbf{M})=0$  soit :

$$2f_1 f_2 + f_2 [-f_2 \sinh(f_1 L) \sin(f_2 L) - f_1 \cosh(f_1 L) \cos(f_2 L)] - f_1 [f_2 \cosh(f_1 L) \cos(f_2 L) - f_1 \sinh(f_1 L) \sin(f_2 L)] = 0 \quad (\text{B-20})$$

On obtient alors :

$$w_n(x) = \cos(f_2(x)) - \cosh(f_1(x)) + \left[ \sin(f_2 x) - \frac{f_2}{f_1} \sinh(f_1 x) \right] \frac{\cos(f_2 L) - \cosh(f_1 L)}{\frac{f_2}{f_1} \sinh(f_1 L) - \sin(f_2 L)} \quad (\text{B-21})$$

## Annexe C Modèle différences finies de l'équation de Reynolds

$$3G \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + 3G \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + G^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = 12\mu \left( \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial t} \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) + \frac{1}{P_0} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (C-1)$$

Le schéma numérique est le suivant :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (C-2a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (C-2b)$$

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial t} = \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (C-2c)$$

Les conditions limites sont celles de bords ouverts :

$$p_{0,j} = p_{N_x,j} = 0$$

$$p_{i,0} = p_{i,N_y} = 0$$

Pour l'intégration dans le temps, un schéma implicite donne :

$$\left( 3G \frac{\partial G}{\partial x} \right)_i^{k+1} \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \Big|^{k+1} + \left( 3G \frac{\partial G}{\partial y} \right)_i^{k+1} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} \Big|^{k+1} + G^2 \left( \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \Big|^{k+1} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \Big|^{k+1} \right) = \quad (C-3)$$

$$12\mu \left( \frac{V_i}{G_i} \Big|^{k+1} \left( 1 + \frac{p_{i,j}^{k+1}}{P_0} \right) + \frac{1}{P_0} \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k}{\Delta t} \right)$$

$$i = 2, \dots, N_x - 1$$

$$j = 2, \dots, N_y - 1$$

La résolution finale sous forme matricielle peut s'écrire :

$$\left( \mathbf{A}(G, \dot{G}) \Big|^{k+1} - \frac{12\mu}{P_0 \Delta t} \mathbf{I} \right) \mathbf{p}^{k+1} = 12\mu \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{G}} \Big|^{k+1} - 12\mu \frac{\mathbf{p}^k}{P_0 \Delta t} \quad (C-4)$$

## Annexe D      Processus d'Arnoldi

Ce processus génère une base du sous-espace de Krylov  $K_r(\mathbf{A}, \mathbf{r}) = \text{vect}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}_1 \mathbf{r}, \mathbf{A}_1^2 \mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}_1^{k-1} \mathbf{r}\}$  de dimension  $k$ . La matrice  $\mathbf{A}$  et le vecteur  $\mathbf{r}$  sont déterminés à partir de la représentation d'état du système (cf §1.2.2).

### Programme Matlab

```
% entrées
A1=inv(A);
b=A1*B;
q=4; %ordre du modèle

%sorties
V=zeros(param.mesh.N,q+1);

%variables intermédiaires
H=zeros(q,q);

%initialisation
V(:,1)=b/norm(b);

for j=1:q
    w=A1*V(:,j);
    for i=1:j
        H(i,j)=w'*V(:,i);
        w=w-H(i,j)*V(:,i);
    end
    H(j+1,j)=norm(w);
    if (H(j+1,j)~=0);
        V(:,j+1)=w/H(j+1,j);
    end
end
V=V(:,1:end-1); %on élimine le dernier vecteur
```



## Annexe E Modèle différences finies couplé

### -Equation d'Euler Bernoulli

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (S + S_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F_{ext} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (E-1)$$

$$S = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (E-2)$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_i = \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4} \quad (E-3a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (E-3b)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\Delta x} \quad (E-3c)$$

### -Conditions limites

Points à l'intérieur du domaine  $1, \dots, N_x$

Points à l'extérieur du domaine indice  $-1, 0, N_x+1, N_x+2$

Poutre encastree-encastree

$$w_1 = 0$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_1 = \frac{w_2 - w_0}{2\Delta x} = 0 \implies w_0 = w_2 \quad (E-4)$$

En écrivant (E-1) au point 1, on trouve aussi  $w_{-1} = w_3$ .

Toutefois seul  $w_0$  est nécessaire à l'écriture de (E-1) au point 2 du domaine.

De même  $w_{N_x} = 0$  et  $w_{N_x+1} = w_{N_x-1}$  et  $w_{N_x+1}$  est nécessaire à l'écriture de (E-1) au point  $N_x-1$  du domaine.

### -Reynolds

$$\bar{\nabla} \left( \frac{G^3}{12\mu} \bar{\nabla} p \right) = \frac{\partial G}{\partial t} \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) + \frac{G}{P_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (E-5)$$

On applique ici pour les dérivées secondes le même schéma que pour l'équation d'Euler Bernoulli et pour la dérivée première, le schéma suivant qui diffère de celui présenté en annexe C :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \quad (\text{E-6})$$

On obtient un système d'équation de la forme :

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial t} = Q_{00}(G, \dot{G}) p_{i,j} + Q_{+10}(G) p_{i+1,j} + Q_{-10}(G) p_{i-1,j} + Q_{01}(G)(p_{i,j-1} + p_{i,j+1}) + R(G) \frac{\partial G_i}{\partial t} \quad (\text{E-7a})$$

où

$$Q_{00} = \frac{P_0}{12\mu} \left( -\frac{1}{\Delta x^2} \left( \frac{G_i^3 + G_{i-1}^3}{G_i} \right) - \frac{2}{\Delta y^2} G_i^2 \right) - \frac{1}{G_i} \frac{\partial G_i}{\partial t} \quad (\text{E-7b})$$

$$Q_{+10} = \frac{P_0}{12\mu} \frac{G_i^2}{\Delta x^2} \quad (\text{E-7c})$$

$$Q_{-10} = \frac{P_0}{12\mu} \frac{G_{i-1}^3}{G_i \Delta x^2} \quad (\text{E-7d})$$

$$Q_{01} = \frac{P_0}{12\mu} \frac{G_i^2}{\Delta y^2} \quad (\text{E-7e})$$

$$R = -\frac{P_0}{G_i} \quad (\text{E-7f})$$

Les conditions limites respectant la condition  $\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right| = 0$  sur les bords encastres et  $p = 0$  sur

les bords libre se ramènent à :

$$p_{0,j} = p_{1,j}, \quad p_{N_x,j} = p_{N_x-1,j} \quad (\text{E-8a})$$

$$p_{i,0} = p_{i,N_y} = 0. \quad (\text{E-8b})$$

La matrice **B** couple le modèle structure et fluide et est construite telle que l'on intègre la pression sur la largeur pour chaque composante du vecteur déplacement. Soit la  $i^{\text{ème}}$  ligne de **B** vaut [1, 1, 1, ..., 1, 1, 1] entre sa  $(i-1)(N_y - 2) + 1^{\text{ème}}$  colonne et sa  $i(N_y - 2)^{\text{ème}}$  colonne.  $N_y$  est le nombre de points de maillage sur la largeur.

## Annexe F      Modèle linéarisés par morceaux : calcul des jacobiens

### a-Modèle réduit

Jacobiens JF et JG des fonctions **f** et **g**.

Fonctions **f** et **g**.

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{c}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{F-1})$$

Et

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K} & 0 & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \\ 0 & 0 & \mathbf{H}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (\text{F-2})$$

**JG** et **JF** les jacobiens respectif des fonctions **g** et **f** ont alors la forme suivante :

$$\mathbf{JG} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{z}) & \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{F-3})$$

$$\mathbf{JF} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(\mathbf{z}) & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{z}) & \mathbf{0} & \mathbf{H}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{F-4})$$

où la 1<sup>ière</sup> colonne de **Q**, **C** et **D** s'écrivent :

$$\mathbf{Q}_l = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_l} \mathbf{s} - \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z_l} \quad (\text{F-5})$$

$$\mathbf{C}_l(\mathbf{z}) = -\mathbf{K}_l + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_l} \mathbf{s} \quad (\text{F-6})$$

$$\mathbf{D}_l(\mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z_l} \mathbf{s} \quad (\text{F-7})$$

avec  $1 \leq l \leq N_m$ ,  $N_m$  nombre de modes mécaniques

On considère un seul mode mécanique  $w_l$ . Les expressions des dérivées sont les suivantes :

$$A_{kj} = \iint (G_0 - a_l w_l)^{-2} \varphi_k \varphi_j d\Omega \quad (\text{F-8a})$$

$k, j = 1, \dots, N_s$ ,  $N_s$  nombre de modes d'amortissement

$$\frac{\partial A_{kj}}{\partial z_l} = \iint 2(G_0 - a_l w_l)^{-3} w_l(x) \varphi_k(x, y) \varphi_j(x, y) d\Omega \quad (\text{F-8b})$$

$$c_k = 2P_0 \iint (G_0 - a_1 w_l)^{-1/2} \varphi_k d\Omega, \quad k = 1, \dots, Ns \quad (\text{F-9a})$$

$$\frac{\partial c_k}{\partial z_l} = P_0 \iint (G_0 - a_1 w_l)^{-3/2} \varphi_k w_l d\Omega \quad (\text{F-9b})$$

$$H_{kj} = \frac{P_0}{12\mu} \left[ -\lambda_k^2 \delta_{kj} - \iint \frac{\Delta(a_1 w_l)^{3/2}}{(a_1 w_l)^{3/2}} \varphi_k \varphi_j d\Omega \right] \quad k, j = 1, \dots, Ns \quad (\text{F-10a})$$

$$\frac{\partial H_{kj}}{\partial z_l} = \frac{3}{2} \frac{P_0}{12\mu} \iint \Delta \left( (G_0 - a_1 w_l)^{1/2} w_l \right) (G_0 - a_1 w_l)^{-3/2} - (G_0 - a_1 w_l)^{-5/2} w_l \Delta (G_0 - a_1 w_l)^{3/2} \varphi_k \varphi_j d\Omega$$

(F-10b)

$$B_{kj} = - \iint (G - a_1 w_l)^{-3/2} \varphi_j w_k d\Omega \quad k = 1, \dots, Nm, \quad j = 1, \dots, Ns \quad (\text{F-11a})$$

$$\frac{\partial B_{kj}}{\partial z_l} = - \frac{3}{2} \iint (G_0 - a_1 w_l)^{-5/2} w_l w_k \varphi_j d\Omega \quad (\text{F-11b})$$

## b-Modèle différences finies

Dans ce cas seul le jacobien de la fonction **f** est à calculer. La fonction **f** a la forme suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\mathbf{w}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (\text{F-12})$$

Où **z** est le vecteur d'état.

Le jacobien **JF** a alors la forme suivante :

$$\mathbf{JF}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}(\mathbf{z}) + \mathbf{E}(\mathbf{z}) & \mathbf{R}(\mathbf{w}) + \mathbf{L}(\mathbf{z}) & \mathbf{Q}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} \quad (\text{F-13})$$

Où les matrices **C** et **E** proviennent respectivement de la dérivation des termes **R(w)** **w** et **Q(w, ẇ) p** par rapport aux termes de **w**. La matrice **L** correspond à la dérivation des termes de **Q(w, ẇ) p** par rapport aux termes **ẇ**

L'expression des coefficients de **C** est simplement dérivable, nous ne détaillons que la dérivation de la matrice **E**. La j<sup>ième</sup> colonne de la matrice **E** correspond à :

$$\mathbf{E}_j = \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial w_j} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (\text{F-14})$$

Seuls les coefficients de  $\mathbf{Q}$  dépendant de  $w_j$ ,  $j^{\text{ième}}$  terme de  $\mathbf{w}$  seront non nuls.

La démarche est la même pour la dérivation de la matrice  $\mathbf{L}$ .

## Annexe G      Modèle réduit couplé incompressible

L'équation de Reynolds incompressible avec l'hypothèse des petites variations de pression et le changement de variable  $p = \varphi G^{-3/2}$  s'écrit :

$$\Delta \varphi - \varphi \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} = \frac{12\mu}{G^{3/2}} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (\text{G-1})$$

Projetée sur les modes propres du Laplacien  $\varphi_k$  et en approchant  $w(x,t)$  le déplacement de la poutre par le premier mode mécanique  $w_1(x)$  elle peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\mathbf{H}\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{P}\dot{\mathbf{a}} \quad (\text{G-2a})$$

où

$$\varphi(x, y, t) = \sum_k s_k(t) \varphi_k(x, y) \quad (\text{G-2b})$$

$$w(x, t) = a_1(t) w_1(x) \quad (\text{G-2c})$$

et

$$\mathbf{H}_{lk}(G) = \left( -\lambda_k^2 \delta_{kl} - \left\langle \frac{\Delta G^{3/2}}{G^{3/2}} \varphi_k \middle| \varphi_l \right\rangle \right) \quad (\text{G-2d})$$

$$\mathbf{F}\mathbf{P}_{lk}(G) = -12\mu \left\langle \frac{1}{G^{3/2}} w_k \middle| \varphi_l \right\rangle \quad (\text{G-2e})$$

Le modèle réduit couplé peut donc s'écrire en reprenant les notations de (3-15a) :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_2(\mathbf{a}) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{P}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}^e(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{G-3})$$